

2026年1月12日

山寄ゼミ 卒業レポート報告

アクティブ株式ファンドのパフォーマンス評価と特性分析

法政大学 経営学部 経営戦略学科 4年 世古 妃奈梨
経営学科 4年 若竹 皐樹
経営戦略学科 4年 臼田 侑真
指導教員 山寄 輝

目次

1. はじめに.....	3
1.1 図表まとめ.....	3
1.2 問まとめ.....	5
2. 解法.....	6
2.1 問 1.....	6
2.2 問 2.....	6
2.3 問 3.....	7
2.3.1 期待収益率（年率）.....	7
2.3.2 標準偏差（年率）.....	8
2.3.3 今後 1 年間の収益率がマイナスになる確率.....	9
2.4 問 4.....	9
2.4.1 問題文の背景.....	9
2.4.2 仮説検定.....	10
2.5 問 5.....	12
2.5.1 ファーマ・フレンチの 3 ファクター・モデルの基本形.....	12
2.5.2 株式投信「蒼樹」のアルファ・ベータ値比較.....	12
2.5.3 株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性.....	13
2.6 問 6.....	13
2.6.1 両モデルの前提.....	14
2.6.2 両モデルの前提の相違点.....	14
3. おわりに.....	14
4. 参考文献.....	15
補論 1.....	15
補論 2.....	16
補論 3.....	19

1. はじめに

近年、アクティブ運用に対する関心は高まり続けているが、そのパフォーマンスが市場平均を持続的に上回るかどうか、金融実務および学術研究における双方において重要なテーマとなっている。特に、アクティブ運用の成果を測定する際に用いられるアルファは、運用者の銘柄選択能力を示す指標として中心的な役割を果たしている。しかし、実際に観測されるアルファが有意であり、真に運用者の能力を反映しているのか、それとも偶然によるものなのかを判断するには、統計的な分析が必要となる。そこで本レポートでは、与えられた業種別ポートフォリオおよび株式投信「蒼樹」について、CAPMおよびファーマ・フレンチ・ファクター・モデルを用いてアルファの大きさと有意性を検証することを目的とする。また、決定係数やベータを比較し、ポートフォリオのリスク特性および市場要因への感応度を考察する。

1.1 図表まとめ

本レポートでは、図表を用いて解法を述べる。図表1については、7個の業種分類に基づく業種別ポートフォリオおよび某社の株式投信「蒼樹」の超過収益率を従属変数、TOPIXの超過収益率を独立変数とする8本の回帰分析の結果を示している。また、図表2については、株式投信「蒼樹」の超過収益率を3個のファーマ・フレンチ・ファクターに回帰した回帰分析の結果を示している。

図表1 業種別ポートフォリオ

業種	アルファ	ベータ	残差の標準偏差	決定係数
①素材	-0.054(0.213)	0.875(0.040)	1.638	0.895
②機械・自動車	-0.063(0.443)	1.002(0.082)	3.398	0.721
③電気・電子	-0.383(0.372)	1.100(0.069)	2.859	0.814
④情報通信	-0.181(0.303)	0.756(0.056)	2.325	0.759
⑤公益	0.514(0.477)	0.179(0.089)	3.662	0.066
⑥消費・流通	0.078(0.626)	0.892(0.080)	3.304	0.685
⑦金融	0.051(0.305)	1.354(0.117)	4.807	0.702
株式投信「蒼樹」	0.809(0.305)	0.959(0.066)	2.357	0.783

注) 超過収益率は、リスクフリー・レートを基準にした超過収益率である。

注) 分析に用いた原データは過去60か月の月次収益率である。

注) 表中のカッコ内の数字は左欄の推定値の標準誤差を示している。

注) アルファと残差の標準偏差についてはパーセントで表示している。

図表2 ファーマ・フレンチ・ファクターへの回帰係数（株式投信「蒼樹」）

	アルファ (y 切片)	第1ファクター (市場)	第2ファクター (サイズ)	第3ファクター (バリュー)
係数	-0.027	1.070	0.243	1.079
標準誤差	(0.182)	(0.039)	(0.070)	(0.098)

注) 第1ファクターは市場ポートフォリオの超過収益率を示す。

注) 第2ファクターは小型株ポートフォリオと大型株ポートフォリオの収益率の差を示している。

注) 第3ファクターはバリュー株ポートフォリオとグロース株ポートフォリオの収益率の差で示している。

図表3 t-分布表（上側確率ポイント）

自由度	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174

1.2 問まとめ

本レポートで扱う問について以下にまとめる。

<問題>

- 問1 図表1によれば、過去5年間で株式市場の上昇・下落の影響を受ける度合いが最も小さかったのはどの業種か。また、その原因として考えられることを述べなさい。
- 問2 図表1に記載された「標準誤差」と「決定係数」はそれぞれ何を示すか、述べなさい。
- 問3 電気・電子業種ポートフォリオのベータは、真の値が図表1のとおり1.1であるとする。また、リスクフリー・レートは2%、株式市場のリスクプレミアムは4%、市場ポートフォリオの標準偏差は20%とする（いずれも年率表示）。図表1の結果を用いて、電気・電子ポートフォリオについて「期待収益率（年率）」と「標準偏差（年率）」、「今後1年間の収益率がマイナスになる確率」について各数値を求めなさい。ただし、この解答では、CAPMが成立しているものと仮定する。
- 問4 図表1の結果を用いて、株式投信「蒼樹」のアルファが0であるという仮説を、有意水準5%の両側検定で仮説検定し、また、この結果が何を示すか述べなさい。
- 問5 図表2から株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性として読み取れることを述べなさい。
- 問6 リスクとリスクプレミアムの間に成立する関係について、CAPMとファーマ・フレンチの3ファクター・モデルの主張の違いを説明しなさい。

2. 解法

2節では、問1から問6までの解法についてまとめる。

2.1 問1

本節では、株式市場の変動に対する各業種の感応度を比較し、市場の上昇・下落の影響を最も受けにくい業種を特定する。

図表1においてベータは、各業種の収益率が市場全体の動きに対してどの程度反応するかを表す指標である。値が大きいほど市場と同じ方向に大きく変動し、逆に値が小さいほど市場の変動を受けにくいことを意味する。また、決定係数は、各業種の収益率変動のうち、市場要因によって説明される割合を表す指標である。決定係数の値が小さい場合、その業種は市場とは独立した固有の要因によって動いている割合が高いと判断できる。以上より、市場の影響を受けにくい業種を特定するには、ベータと決定係数がともに小さい業種を選択することが適切である。図表1より、⑤公益のベータが最も低く、市場変動に対する感応度が非常に小さいことが確認できる。また、決定係数も0.066と、他の業種と比較した際に著しく低く、市場要因では説明されない固有の要因による変動が大きい。このことは、公益が市場全体の上昇・下落に左右されにくく、独自の動きを示す傾向が強いことを意味している。

公益には、電力・ガス・水道といった生活インフラ関連の企業が含まれる。これらの業種は景気変動にかかわらず一定の需要が維持されるため、市場の変動に影響されにくいという構造的特徴を有している。この特徴は、問1において公益を選択する根拠となる。

2.2 問2

本節では、標準誤差および決定係数の意味について説明する。標準誤差とは、標本から推定される平均値や回帰係数が、真の値からどの程度ばらつき得るかを表す指標である。特に回帰分析においては、推定された係数の信頼性を判断する基準として用いられ、値が小さいほど推定精度が高いことを意味する。一方、決定係数については従属変数の変動のうち回帰式で説明できる割合を表す指標である。数値が大きいほど、独立変数が従属変数の変動をより多く説明していることを示す。

本節では、図表1に示された標準誤差および決定係数が持つ意味を整理する。図表1において、標準誤差の値は各業種のベータがどれほど安定して推定されているかを示している。標準誤差が小さい業種では、係数の推定が比較的信頼できる一方、標準誤差が大きい場合には推定の不確実性が高く、係数がばらつきやすい。また決定係数は、2.1節

で説明した通り、各業種の収益率変動のうち、市場要因によって説明される割合を示す。図表 1 の値を確認することで、各業種が市場全体の変動にどの程度影響を受けているかを把握することができる。

2.3 問 3

本節では、電気・電子業種ポートフォリオの期待収益率、標準偏差および今後 1 年間の収益率がマイナスになる確率を求める。

ある銘柄のアルファやベータを調べる際に、その値を直接観測するのは困難である。そこで、通常は本問のように過去の実績値から回帰分析によってそれらの値を計算し、計算された値は推定値として扱う。計算によって求められた推定値はあくまでも過去の実績値に基づいて計算された値であり、その銘柄の真のアルファやベータを表しているとは限らない。しかし、今回は問題文において「電気・電子業種ポートフォリオのベータは、真の値が図表 1 のとおり 1.1 であるとする」と仮定されているため、図表 1 の推定値ベータを真のベータとして扱って問題ない。また、問題文において「この解答では市場で CAPM が成立しているもの」と仮定されているため、真のアルファの値は 0 であるとみなす。

2.3.1 期待収益率（年率）

ある株式ポートフォリオ i の期待収益率は、

$$E[R_i] = r_f + \alpha_i + \beta_i(E[R_m] - r_f), \quad (1)$$

と表される。ただし、 $E[R_i]$ と $E[R_m]$ はそれぞれポートフォリオ i と市場ポートフォリオの期待収益率（年率）、 r_f はリスクフリー・レート（年率）、 α_i と β_i はそれぞれポートフォリオ i のアルファとベータである。リスクフリー・レートは 2%、株式市場のリスクプレミアムは 4%である。また、CAPM が成立していると仮定しているため、アルファはゼロである。ベータは図表 1 のとおり 1.1 であるとする。したがって電気・電子業種ポートフォリオの期待収益率を $E[R_3]$ とおくと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} E[R_3] &= 2\% + 1.1 \times 4\% \\ &= 6.4\%. \end{aligned} \quad (2)$$

よって電気・電子業種ポートフォリオの期待収益率（年率）は 6.4%と求められる。

2.3.2 標準偏差（年率）

まず市場ポートフォリオと電気・電子業種ポートフォリオの期待収益率の共分散を求める。電気・電子業種ポートフォリオのベータは、

$$\beta_3 = \frac{Cov(R_3, R_m)}{V(R_m)}, \quad (3)$$

と表される。ただし、 β_3 は電気・電子業種ポートフォリオのベータ、 R_3 と R_m はそれぞれ電気・電子業種ポートフォリオと市場ポートフォリオの収益率、 $Cov(R_3, R_m)$ は R_3 と R_m の共分散、 $V(R_m)$ は R_m の分散である。 β_3 は1.1、 $V(R_m)$ は市場ポートフォリオの標準偏差20%の二乗であるため、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} Cov(R_3, R_m) &= \beta_3 \times V(R_m) \\ &= 1.1 \times (20\%)^2 \\ &= 0.044. \end{aligned} \quad (4)$$

次に R_3 と R_m の相関係数を求める。単回帰分析において、相関係数は決定係数の平方根の値となることが知られている。また、共分散が正の値をとるため、相関係数も正の値をとる。図表1より電気・電子業種ポートフォリオの決定係数は0.814であるから、 R_3 と R_m の相関係数を $\rho_{R_3R_m}$ とおくと、以下のようなになる。

$$\rho_{R_3R_m} = \sqrt{0.814}. \quad (5)$$

ここで、ある二値の相関係数は、同じ二値の共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで求められることを利用する。 $\rho_{R_3R_m}$ は $\sqrt{0.814}$ 、 $Cov(R_3, R_m)$ は0.044、 R_m の標準偏差は20%であるから、 R_3 の標準偏差を σ_{R_3} 、 R_m の標準偏差を σ_{R_m} とおくと、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{R_3} &= \frac{Cov(R_3, R_m)}{\rho_{R_3R_m} \times \sigma_{R_m}} \\ &= \frac{0.044}{\sqrt{0.814} \times 20\%} \\ &= 0.24384 \dots \\ &\approx 24.38\%. \end{aligned} \quad (6)$$

したがって電気・電子業種ポートフォリオの標準偏差（年率）は 24.38%と求められる。

2.3.3 今後 1 年間の収益率がマイナスになる確率

今後 1 年間の電気・電子業種ポートフォリオの収益率を $R_{3,t+1}$ とおくと、 $R_{3,t+1}$ がマイナスになる確率は $P(R_{3,t+1} < 0)$ と表される。ここで、標準化によって作り出された確率変数を $Z_{R_{3,t+1}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} Z_{R_{3,t+1}} &= \frac{R_{3,t+1} - E[R_3]}{\sigma_{R_3}} \\ &= \frac{R_{3,t+1} - 6.4\%}{24.38\%}, \end{aligned} \quad (7)$$

と表される（標準化の詳細については補論 2 を参照）。したがって、

$$\begin{aligned} P(R_{3,t+1} < 0) &= P\left(\frac{R_{3,t+1} - 6.4\%}{24.38\%} < \frac{0 - 6.4\%}{24.38\%}\right) \\ &= P(Z_{R_{3,t+1}} < -0.26) \\ &= P(Z_{R_{3,t+1}} > 0.26) \\ &= 1 - P(Z_{R_{3,t+1}} < 0.26) \\ &= 1 - 0.6026 \\ &= 0.3924, \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。よって、今後 1 年間の収益率 $R_{3,t+1}$ がマイナスになる確率は 39.24%と求められる。

2.4 問 4

本節では、問 4 の解法について説明する。ここでは、帰無仮説として株式投信「蒼樹」のアルファが 0 であるとする。また、有意水準 5% の両側検定で仮説検定し、この結果が何を示すのかを述べる。

2.4.1 問題文の背景

解法を述べる前に、本問で用いる仮説検定について説明する。ある集団の性質を調べるとき、調査対象全体を母集団、母集団から抽出されたデータを標本という。本問では、

母集団を株式投信「蒼樹」とし、標本を回帰分析に用いられた「蒼樹」の過去 60 か月分のデータとする。2.3 節で述べたとおり、個別銘柄のアルファやベータを直接観測することは困難であり、これは本問における母集団「蒼樹」のアルファについても同様である。そこで、母集団から抽出された標本に対して回帰分析を行い、得られたアルファは推定値として扱う。ただし、この推定値は過去の実績データに基づくものであるため、母集団のアルファを適切に反映しているかを検証する必要がある。その検証手法として仮説検定を用いる。仮説検定では、まず帰無仮説と対立仮説を設定する。一般に、否定したい仮説を帰無仮説、これに対立する仮説を対立仮説とする。検定では、帰無仮説が正しいと仮定した下で得られた推定値が稀な事象であるかを評価し、その稀少性が十分に高い場合には帰無仮説を棄却し、対立仮説が妥当であると判断する。次に、帰無仮説が正しいと仮定した場合に、標本から得られた推定値が観測される確率（以下、帰無仮説下の実現確率という）を算出する。本来であれば、2.3.3 節と同様に標準化を用いて確率を求めることが望ましいが、母集団の標準偏差が未知であるため、不偏標準偏差を用いて標準化を行う。このとき、不偏標準偏差によって標準化された確率変数は標準正規分布には従わず、 t 分布に従うことが知られている。そのため、本問では t 分布に基づく t 検定を用いる（ t 分布の詳細については補論 3 を参照）。最後に、帰無仮説下の実現確率と有意水準を比較し、前者が後者を下回る場合には帰無仮説を棄却する。本問では、有意水準を 5% とし、帰無仮説下の実現確率がこれを下回るとき、当該推定値は帰無仮説の下では極めて稀な事象であると判断され、帰無仮説は支持されないと結論づけられる。

2.4.2 仮説検定

以上の流れをもとに解法を説明する。まずは帰無仮説（以下、 H_0 と略記）と対立仮説（以下、 H_1 と略記）を設定する。本問では「株式投信『蒼樹』のアルファが 0 であるという仮説を」「両側検定で仮説検定」するように指定されているため、 $\alpha = 0$ であるかそうでないかを調べたい。そのため、 H_0 を $\alpha = 0$ 、 H_1 を $\alpha \neq 0$ とおく。次に帰無仮説下の実現確率を求めるために、過去のデータから求めた株式投信「蒼樹」の推定値アルファに対して標準化を行う。一度 H_0 が正しいと仮定するため、このときのアルファは 0 である。また、母分散がわからないので、不偏標準偏差で標準誤差を計算する。よって推定値アルファに対して標準化を行うと、

$$t = \frac{\hat{\alpha} - 0}{s_{\hat{\alpha}}}, \quad (9)$$

と表される。ただし、 t は標準化によって作り出された確率変数、 $\hat{\alpha}$ は株式投信「蒼樹」の推定値アルファ、 $s_{\hat{\alpha}}$ は推定値アルファの標準誤差である。それぞれに値を代入すると、

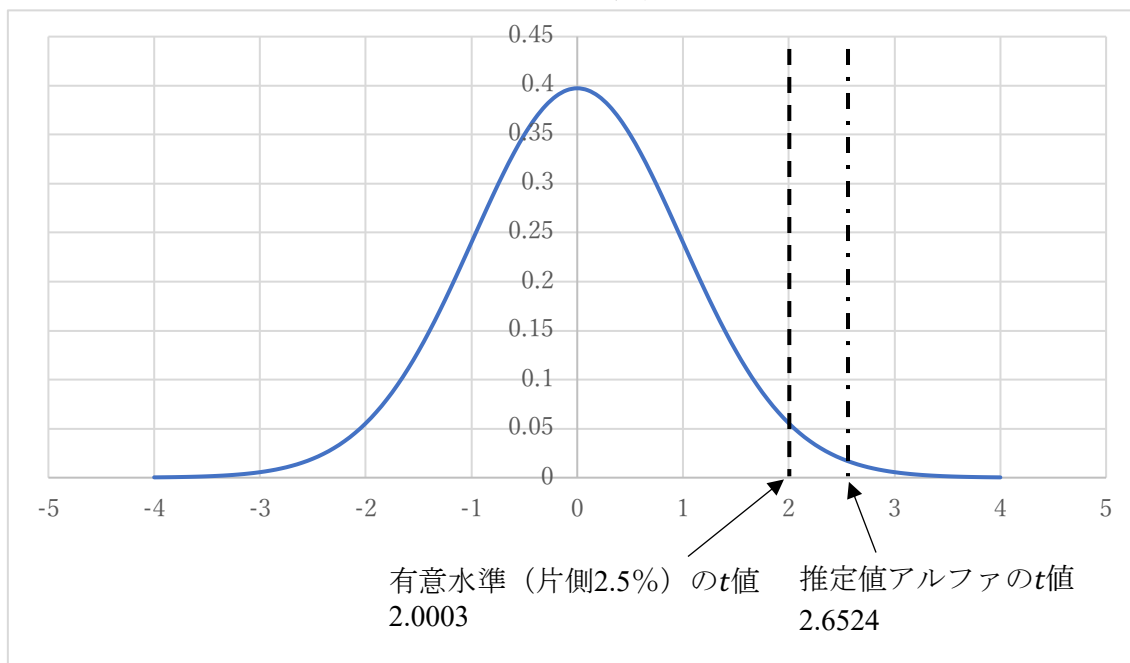
$$t = \frac{0.809 - 0}{0.305} \quad (10)$$

$$\approx 2.6524,$$

と計算される。

また、このように $H_0: \alpha = 0$ が正しいとした場合の確率変数 t の値を推定値アルファの t 値とよぶ。この t 値と有意水準5%に対応する確率変数 t の値を比較する。後者の値は図表3の t 分布表を参照する。本問で行うのは有意水準5%の両側検定であるため、横軸は0.25を参照する。また、確率変数 t の自由度は $n - 2 = 60 - 2 = 58$ であるが、 n の数は十分に大きいとみなすことができ、縦軸は自由度60を参照しても構わない。よって、有意水準5%に対応する確率変数 t の値は、図表3より2.0003だと求められる。推定値アルファの t 値は2.6524、有意水準5%に対応する確率変数 t の値は2.0003であるから、二つの値を比較すると推定値アルファの t 値が有意水準5%に対応する確率変数 t の値を上回る。したがって、帰無仮説下の実現確率が有意水準を下回るため $H_0: \alpha = 0$ は棄却され、図表1の株式投信「蒼樹」推定値アルファの値0.809は、統計的に有意であるといえる。

図表4 t 分布における推定値と有意水準 t 値の位置関係



2.5 問5

本節では、CAPMの拡張的理論であるファーマ・フレンチの3ファクター・モデルを用いて、株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性を考察する。図表2は、本ポートフォリオについて推定された係数及び標準誤差を示している。

2.5.1 ファーマ・フレンチの3ファクター・モデルの基本形

ファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは、CAPMから発展した理論であり、一般的に次式で表される。

$$R_i - r_f = \alpha_i + \beta_{i,MKT}(R_m - r_f) + \beta_{i,SMB}SMB + \beta_{i,HML}HML + \varepsilon, \quad (11)$$

ただし、SMBはサイズ・ファクターであり、HMLはバリュー・ファクターである。これについて、佐野(2022)は、「サイズ・ファクターは、小型株のリターンが大型株のリターンを上回るという、小型株効果と呼ばれる経験的な観察結果を示し、バリュー・ファクターは、割安株のリターンが成長株のリターンを上回るという、バリュー株効果と呼ばれる経験的な観察結果を表す」と説明している。これらの市場アノマリーを考慮するため、本モデルではSMBおよびHMLに対する感応度を、それぞれの係数 β として表している。また、 α_i はその他の要因で説明できない超過収益率であり、本分析では誤差項 ε は用いない。

2.5.2 株式投信「蒼樹」のアルファ・ベータ値比較

最初に、ベータ値の観点から株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性を検討する。図表2に示された係数は各ファクターに対するベータであり、ポートフォリオの値動きの特徴を示す重要な指標である。ベータ値の大小によってファクターに対する値動きが説明されるが、その大小関係を以下に示す。

図表5 各ベータ値の大小関係から読み取れる性質

	$\beta < 0$	$\beta = 0$	$\beta > 0$	$\beta = 1$
$\beta_{i,MKT}$	市場に対し負の動き	連動なし	市場に対し正の動き	市場と一致
$\beta_{i,SMB}$	大型株に優位	連動なし	小型株に優位	
$\beta_{i,HML}$	グロース株に優位	連動なし	バリュー株に優位	

図表5に基づき、係数を検討する。まず、 $\beta_{i,MKT}$ については値が1.070であり、この

ことは、市場と同程度の値動きをすることを示す。そして、 $\beta_{i,SMB}$ については値が 0.243 であり、小型株寄りの傾向があるが、その影響は大きくないと考えられる。最後に、 $\beta_{i,HML}$ については値が 1.079 であり、強いバリュー株の特性を持っているといえる。

次に、これらの係数が統計的に有意であるかを検定する。前節と同様、有意水準 5% の両側検定を行い、帰無仮説を以下のように設定する。帰無仮説について、市場ベータは、 $\beta_0 = 1$ とし、サイズ・ベータとバリュー・ベータについては $\beta_0 = 0$ と仮定した。前節と同様に、上側 2.5%は 2.0003 であり、この値と t 値の大小比較を行う。 t 値は次式によって求められる。

$$t = \frac{\beta - \beta_0}{SE} \quad (12)$$

上式において、 β は実際に推定された係数であり、図表 2 の値のことを指す。また、 β_0 は帰無仮説で設定した各値である。そして、SE は標準誤差であり、 β と同様、図表 2 で示された値を用いる。

以上より、計算を行う。まず、市場ベータの t 値は 1.79 (< 2.0003) なので、帰無仮説 $\beta_0 = 1$ は棄却できない。そして、サイズ・ベータの t 値は 3.47 (> 2.0003) なので、帰無仮説 $\beta_0 = 0$ は棄却され、小型株が有意となることがわかる。最後に、バリュー・ベータの t 値は 11.01 (> 2.0003) なので、帰無仮説 $\beta_0 = 0$ は棄却され、バリュー株効果が有意となることがわかる。

最後に、アルファについての考察を行う。なお、ベータと同様、係数の大小比較と仮説検定を行った。まず、図表 2 に示される係数アルファの値は-0.027 である。この数値の妥当性を検証するため、帰無仮説を $\alpha_0 = 0$ と仮定し、 t 値を求めると、0.148 (< 2.0003) となる。つまり、帰無仮説は棄却できない。このことから、運用者固有の超過リターンは確認されないことがわかる。

2.5.3 株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性

以上より、株式投信「蒼樹」のポートフォリオ特性についてまとめる。まず、ポートフォリオ特性については、第 1・2・3 ファクターによって説明することができ、アルファは統計的に有意ではなく、運用者固有の超過リターンは確認されない。つまり、株式投信「蒼樹」は市場と同程度のリスクを取りつつ、小型株かつバリュー株寄りの特性を持つと結論づけられる。

2.6 問 6

5 節で検討したファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは、CAPMの理論から派生した代表的なマルチ・ファクター・モデルである。本節では、両モデルの前提の違いに着目し、それぞれの主張の相違を整理する。

2.6.1 両モデルの前提

第一にCAPMとファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは前提が異なる。佐野(2022)によるとCAPMの前提として、「①すべての投資家が持っている情報は同じである(完全情報の仮定)。②資産の収益率の期待値と分散についての投資家の予想は同じである。(同質的期待の仮定)」と述べている。このように、CAPMは完全市場を前提とした理論であり、市場ポートフォリオが唯一の効率的ポートフォリオであるとする。しかし、伊藤・萩島・諏訪部(2009)は「CAPMなどのそれまでのファイナンス理論では説明できない市場アノマリー現象が数多く報告されるようになり、市場の効率性に関する議論が再燃した」と述べている。つまり、CAPMの前提のもとでは、実際の市場で観測されるアノマリーを十分に説明できないということになる。

一方、ファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは完全市場を前提としない。市場で実際に観測される小型株効果やバリュー株効果を明示的に組み込み、経験的に観測される株の収益率の構造をより現実的に説明することを目的としている。

2.6.2 両モデルの前提の相違点

CAPMは、完全市場と投資家の同質性を前提とし、市場リスクのみで株の収益率を説明しようとする。一方、ファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは、不完全市場を前提とし、市場リスクのみでは説明できない要因(サイズ・ファクターやバリュー・ファクター)も考慮する点に特徴がある。つまり、ファーマ・フレンチの3ファクター・モデルは、CAPMの説明力を現実の金融市場へより適合するために発展した理論であると結論付けられる。

3. おわりに

本レポートでは、業種別ポートフォリオと株式投信「蒼樹」に関する回帰分析の結果を元に、両者の特性を考察した。業種別ポートフォリオの分析では、標準誤差や決定係数などの値を用いて市場全体と比較し、それぞれの特徴を明らかにした。また、「電気・電子業種ポートフォリオ」については、期待収益率などの推定を行い、実務的観点からその妥当性を検討した。さらに、株式投信「蒼樹」については、観測された値の統計的有意性を仮説検定により確認し、CAPMやファーマ・フレンチの3ファクター・モデル

の概念に基づき、アクティブ運用としてのパフォーマンスを評価した。

4. 参考文献

- ・伊藤敬介、萩島誠治、諏訪部貴嗣、「新・証券投資論Ⅱ 実務編」、日本経済新聞出版社、2009年
- ・佐野三郎、「改訂版 パーフェクト証券アナリスト第1次レベル」、ビジネス教育出版社、2022年
- ・鯖田豊則、佐野三郎、「三訂版 パーフェクト証券アナリスト第2次レベル」、ビジネス教育出版社、2024年

補論1 標本平均の標準誤差と回帰係数ベータの標準誤差について

標本平均の標準誤差とは、標本から求めた値が、母平均からどの程度乖離するかを示す指標である。母集団のばらつきが小さい場合や、標本数が増える場合には、標本平均の標準誤差は小さくなる。標本平均の標準誤差は、

$$SE(\bar{y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (13)$$

と書くことができる。ただし、 σ は母集団の標準偏差を表し、 \sqrt{n} は標本数 n の平方根である。また、 $SE(\bar{y})$ は標本平均 \bar{y} が母平均からどの程度乖離し得るかを表す指標であり、標本数が大きいほどその値は小さくなる。すなわち、標本数の増加は平均値の推定精度を高める方向に作用する。

回帰係数ベータの標準誤差とは、標本から推定された回帰直線の傾きが、真の回帰係数からどの程度乖離しやすいかを示す指標である。これは、残差の大きさと説明変数の広がりによって決定される。回帰係数ベータの標準誤差は、

$$SE(\hat{\beta}) = \frac{s_{\varepsilon}}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \quad (14)$$

と書くことができる。ただし、 s_{ε} は残差のばらつきを表し、 $(x_i - \bar{x})^2$ は x の二乗誤差を表す。そして、 $SE(\hat{\beta})$ は推定された回帰直線の傾きが、真の回帰係数からどの程度乖離する可能性があるかを示している。説明変数 x の広がりが大きいほど、標本は母集団の特性をより反映するため、推定された回帰係数の信憑性は高まる。一方、 x の範囲が狭い場合には利用できる情報が限られるため、真の回帰直線から乖離しやすくなる。

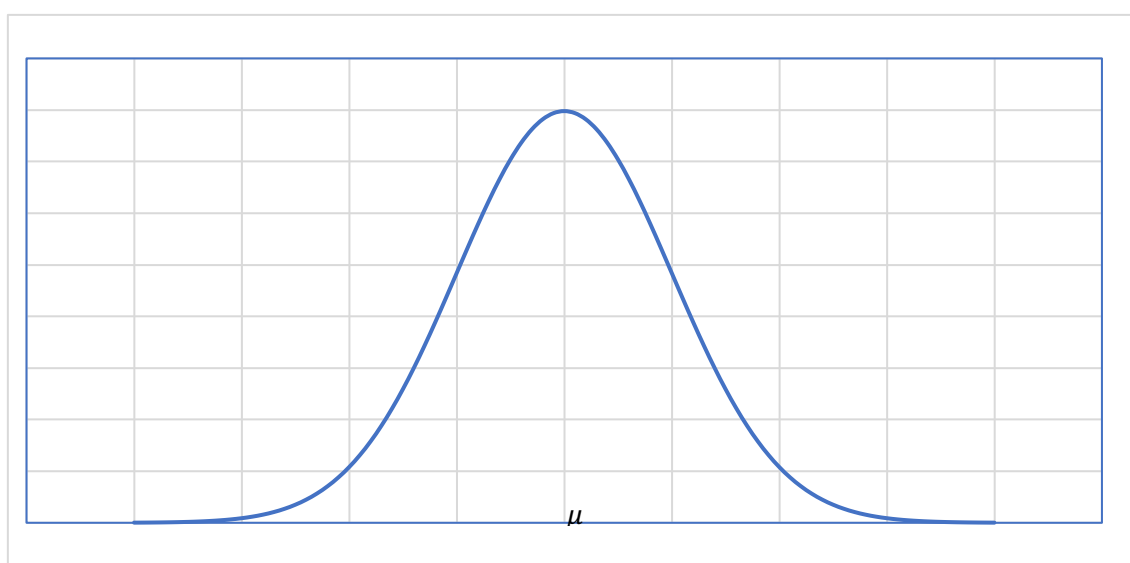
以上のように、標本平均の標準誤差と回帰係数ベータの標準誤差は、いずれも標本から得た推定値が真の値からどの程度乖離し得るかを示す指標である。しかし、推定する対象が異なるため、求め方や影響する要因も大きく異なる。

補論 2 標準化および標準化を用いた確率計算について

標準化を用いた確率計算を説明するため、まず正規分布について述べる。

(1) 正規分布について

図表 6 正規分布の確率密度関数



鯖田・佐野（2024）は、「正規分布とは、平均を中心に左右対称な釣鐘型のグラフで表される連続分布である。」と述べている。図表 6 は、正規分布に従う確率変数を X としたときのその確率分布を図示したものである。横軸は確率変数 X の取り得る値を表し、縦軸は確率そのものではなく確率密度関数の値を表す。確率は、確率密度関数の曲線と横軸で囲まれた面積として定義され、その総和は 1 となる。この性質から、連続型の確率分布においては、特定の一点が実現する確率は 0 とみなされる。したがって、確率は「ある特定の値となる確率」ではなく、「ある区間に含まれる確率」として考える必要がある。

また、図表 6 において、確率密度関数の値が最大となる点は期待値に一致し、分布はその期待値を中心として左右対称となる。また、分散は分布のばらつきの程度を表す尺度である。さらに、確率変数 X の確率密度関数は、

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (15)$$

と表される。ただし、 x は確率変数 X がとる値、 μ は X の期待値、 σ^2 は X の分散、 e はネイピア数である。

また、正規分布に従う確率変数のうち、期待値が0、分散が1であるものの確率分布を標準正規分布という。そして、標準正規分布に従う確率変数の値と、それに対応する確率をまとめた標準正規分布表を図表7に示す。図表7を用いることで、確率変数の値に対応する確率が求められることができる。一般的に、表の第1行には確率変数の値の小数第1位までが、第1列には小数第2位までが示されており、両者の交点に対応する確率の値が記載されている。

例えば、標準正規分布に従う確率変数が1.63以下となる確率を求める場合、1.6の行と0.03の列の交点を参照すると、0.9484であることがわかる。これは図表8における網掛け部分に対応する。これに対し、網掛けされていない部分の確率は、確率の総和が1であることから、1から0.9484を差し引いた0.0516となる。さらに、標準正規分布は原点を中心として左右対称であるため、確率変数が-1.63以下となる確率も同様に0.0516となる。このような性質を利用することで、標準正規分布表に直接記載されていない範囲の確率も求めることが可能である。

標準正規分布に従う確率変数については、標準正規分布表を用いることで求める確率を容易に算出できる。一般に、ある確率変数 X が正規分布に従うとき、 X から期待値 μ を引き、標準偏差 σ で割ることにより、期待値が0、分散が1の標準正規分布に従う確率変数を得ることができる。この操作を標準化という。標準化を行うことで、標準正規分布に従わない正規分布の確率変数についても、標準正規分布表を用いて対応する確率を求めることが可能となる。正規分布に従う確率変数 X から期待値 μ を引いて標準偏差 σ で割ることで期待値が0、分散が1になることは計算によって確認できる。確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおくと、

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (16)$$

と表される。ここで Z の期待値は、 $E[X] = \mu$ であることから、

$$E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[(X - \mu)] = \frac{1}{\sigma}(E[X] - \mu) = 0, \quad (17)$$

となる。また、 Z の分散は、 $E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$ であることから、

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} - 0\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1, \quad (18)$$

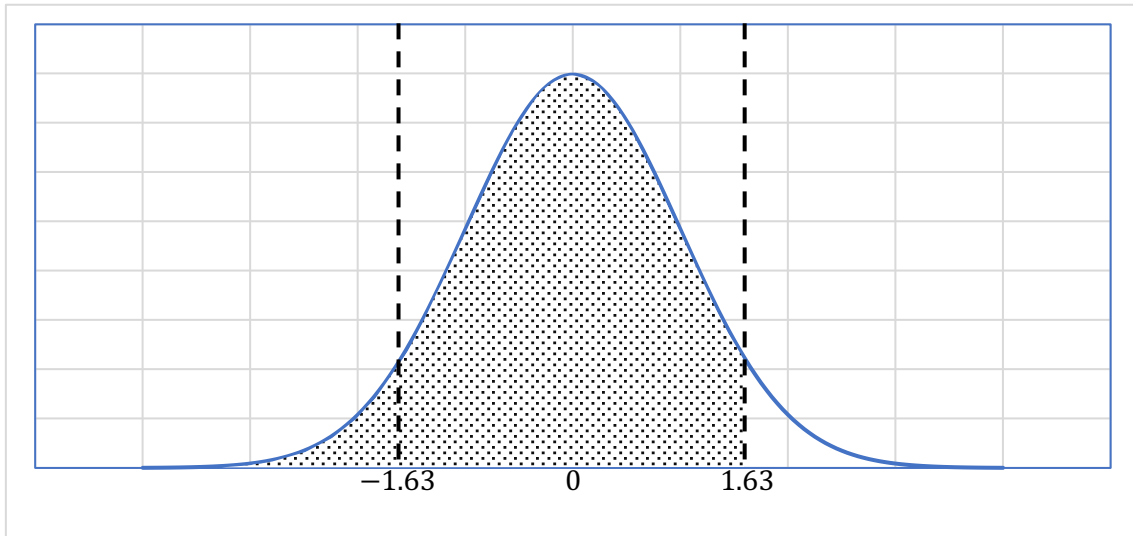
となる。よって、 X を標準化した Z は期待値が0、分散が1となる。

図表 7 標準正規分布表

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

注) 上記の表は、確率変数が当該の値以下となる下側確率を表しているが、使用する標準正規分布表によっては、異なる範囲の確率が示されている場合もある。

図表 8 標準正規分布の確率密度関数



補論3 t分布表について

仮説検定では、母平均だけでなく、母標準偏差も不明である場合がある。このとき、母標準偏差の代わりに不偏標準偏差を用いて検定を行う。不偏標準偏差は以下の式で定義される。

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (19)$$

ただし、 n は標本数を表し、 $(x_i - \bar{x})^2$ は x の二乗誤差を表す。上式では、標本平均 \bar{x} を用いているため、全体のデータの中にひとつの制約が生じる。この制約の影響を調整するため、分母には標本数 n から1を引いた値を用いる。この値を自由度と呼ぶ。

また、 t 分布は標本数が増加するにつれて正規分布に近づく性質を持つ。しかし、推定に不偏標準偏差を用いるため、統計量は正規分布ではなく t 分布に従う。そのため、任意の有意水準に対応する自由度の t 分布表（図表3）を参照し、算出された t 値が棄却域に入るかどうかを判断することになる。