卒業レポート
投資政策とアセット・アロケーション

伊藤進太・鈴木開・鈴木斜恩
2024 年 12 月

【要項】
本レポートでは、証券アナリスト 2 次試験の問題を一部抜粋し、その問題の解法を記載している。

１．はじめに

１－１．問題文

はじめに、本レポートで扱う問題の前提を記載する。
「年金コンサルタントであるあなたは、顧客の ABC 年金基金から、債券と株式で構成される基本ポートフォリオの策定を依頼されている。
まずあなたは、債券および株式の中長期的な期待リターンを求めることにした。想定するフォワードルッキングな市場環境は図表 1 のとおりである。」

図表 1　想定する市場環境（年率）

安全資産リターン	0.0%
長期債のターム・プレミアム	1.0%
株式配当利回り	2.3%
長期債に対するエクイティ・プレミアム	4.5%
企業収益の成長率	2.0%
株式バリュエーション（PER）の変化率	0.0%

１－２．用語説明

問題の前提において、理解が難しい単語について説明する。
はじめに、「基本ポートフォリオ」について説明する。「基本ポートフォリオ」とは長期的な観点から作られた、基本となる資産構成割合のことを言う。短期的な市場動向による割合変化より、資産構成を決め、長期的に維持するほうが、効率的で良い結果をもたらすという前提から、「基本ポートフォリオ」を作ることで、短期的な市場動向に大きく左右されず、効率的でいい結果を期待できるとされている。
次に、「フォワードルッキング」について説明する。「フォワードルッキング」とは金融政策や企業の営業成績など、様々な観点から物事を分析し、「先を見据えた合理的な判断」による予想のことを言う。
次に、「安全資産リターン」について説明する。「安全資産リターン」とは現預金のリターンを指す。基本ポートフォリオを作る際は、国債のような一般的に「安全資産」と考えられる資産でも、「リスク資産」として考える為、手元で決して変動しない

「現預金」を唯一の安全資産として捉える。
　次に、「長期債のターム・プレミアム」について説明する。「長期債のターム・プレミアム」とは、安全資産に比べて、長期的に資産を運用することによって得ることが出来ると仮定される期待リターンを指す。具体的には、長期債の期待リターンから安全資産のリターンを引いたものである。
　次に、「長期債に対するエクイティ・プレミアム」について説明する。「長期債に対するエクイティ・プレミアム」とは、長期債に対して、マーケットの株式平均を運用する事によって得ることが出来る期待リターンを指す。具体的には、マーケットの平均期待リターンから長期債の期待リターンを引いたものである。
　次に、「株式バリュエーション（PER）」について説明する。「株式バリュエーション（PER）」とは、株価が企業の利益と比べて割高か、割安かを判断する指標を指す。具体的には、「当期純利益/発行株式総数」で求めることが出来る。

２．問１．

２－１．問題文

　はじめに、問１の文章を記載する。
「図表１より、株式の期待リターン（年率）を（１）ビルディングブロック法および（２）サプライサイド法により、それぞれ計算しなさい。」

２－２．用語説明

　問１において、理解が難しい単語について説明する。はじめに、「ビルディングブロック法」について説明する。「ビルディングブロック法」とは、CAPM の考えに基づき、安全資産のリターンにリスクプレミアムを加えたものから期待リターンを算出する方法である。CAPM の考え方から導出する方法は(1)式を参照とする。

$$\begin{aligned} E(Ri) &= rf + \beta(E(RM) - rf) \\ &= rf + \beta(E(RT) - rf) + \beta(E(RM) - E(RT)). \quad (1) \end{aligned}$$

　(1)式において、E(Ri)は株式の期待リターン、rf は安全資産のリターン、β は株式感応度、E(RM)は市場の期待リターン、E(RT)は長期債の期待リターン、β(E(RT)-rf)はターム・プレミアム、β（E(RM)-E(RT)）はエクイティ・プレミアムを示している。
　次に、「サプライサイド法」について説明する。「サプライサイド法」とは、定率成長配当割引モデルに基づき、企業の成長等から期待リターンを算出する方法である。定率成長配当割引モデルの考え方から導出する方法は(2)・(3)式を参照とする。

$$P = \frac{D}{K} - g, \quad (2)$$

$$K = \frac{D}{P} + g. \quad (3)$$

　(2)・(3)式において、P は株価、D は 1 株当たりの配当、K は期待リターン g は成長率を示している。

２－３．解法

ここからは、問１の計算を記載する。
はじめにビルディングブロック法による株式の期待リターン（年率）を導出する。

$$
\begin{aligned}
E(Ri) &= rf + \beta(E(RT) - rf) + \beta(E(RM) - E(RT) \\
&= 0.0\% + 1.0\% + 4.5\% \\
&= 5.5\%.
\end{aligned}
$$

上記の計算より、答えは 5.5%となる。
続いて、サプライサイド法による株式の期待リターン（年率）を導出する。

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{D}{P} + g \\
&= 2.3\% + 2.0\% \\
&= 4.3\%.
\end{aligned}
$$

上記の計算より、答えは 4.3%となる。

３．問２．

３－１．問題文

はじめに、問２の文章を記載する。
「市場ポートフォリオは債券と株式で構成されており、そのウェイトは債券 60%、株式 40%である。債券および株式の分散・共分散行列は図表２で与えられるものとする。

図表２　分散・共分散行列

	債券	株式
債券	0.0016	-0.0008
株式	-0.0008	0.0400

（注）図表２は、債券リターンの分散（標準偏差・年率の２乗）が 0.0016、株式リターンの分散（同）が 0.0400、債券リターンの共分散が-0.0008 であることを示す。

図表２より、市場ポートフォリオのリスク（標準偏差・年率）を求めなさい。」

３－２．用語説明

問２において、理解が難しい単語について説明する。
はじめに「市場ポートフォリオのリスク」について説明する。「市場ポートフォリオのリスク」とは、ポートフォリオを構成する要素全体のリスク（標準偏差）を、構成ウェイトを用いて計算することで、リターンの年次変動の大きさを示す指標である。山嵜ゼミのサイトで提示されている、「確率統計入門/43 枚目/性質７」を用いることで、複数の資産で形成されるポートフォリオのリスク（標準偏差）を計算できる。
「確率統計入門/43 枚目/性質７」の式は(4)式として参照しておく。

$$Var[aX + bY] = a^2Var[X] + b^2Var[Y] + 2abCov[X, Y]. \quad (4)$$

(4)式において、Var は分散、Cov は共分散、a は資産 X のウェイト、b は資産 Y のウェイトを示している。

次に「分散」について説明する。「分散」とは確率変数のちらばり度合いを指す。

次に、「共分散」について説明する。「共分散」とは、2 つの確率変数の連動性を指す。性質として、共分散が正の数字の場合、片方が大きくなるともう片方も大きくなる傾向がある。共分散が 0 の場合、2 つの確率変数に関係性はない。共分散が負の場合、片方が大きくなると、もう片方が小さくなる傾向がある。

３－３．解法

ここからは、問 2 の計算について記載する。

(4)式を用いて、資産 X を債券、資産 Y を株式とした時、この 2 資産で構成される市場ポートフォリオの分散を下記のように計算する。

$$\begin{aligned} Var[aX + bY] &= a^2Var[X] + b^2Var[Y] + 2abCov[X, Y] \\ &= 0.6^2 \times 0.0016 + 0.4^2 \times 0.0400 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times (-0.0008) \\ &= 0.006592. \end{aligned}$$

したがって、市場ポートフォリオのリスク（標準偏差）は

$$\sigma(aX + bY) = \sqrt{Var[aX + bY]} = \sqrt{0.006592} \fallingdotseq 8.12\%.$$

上記の計算より、答えは 8.12％となる。

４．問３．

４－１．問題文

はじめに、問３の文章を記載する。

「市場ポートフォリオにおける株式のリスク寄与（標準偏差・年率）を計算しなさい。％表示で小数第 1 位まで求めること。ただし、市場ポートフォリオ・リターンと株式リターンの共分散は 0.01552 である。」

４－２．用語説明

問３において、理解が難しい単語である「リスク寄与」について説明する。「リスク寄与」とは、ポートフォリオ内（今回は市場ポートフォリオ）の各資産が全体のリスクにどの程度関与しているのかを示す指標である。リスク寄与度が大きいほど、その資産のリスクは大きいと考えられる。

リスク寄与の計算式は(5)式のとおりになる。導出過程の詳細は補論を参照せよ。

$$資産iのリスク寄与度 = Wi \times \frac{Cov[i,P]}{\sqrt{Var[P]}} \quad (5)$$

(5)式において、Wi は資産 i のウェイト、Cov[I,P]は資産 i とポートフォリオの共分散、$\sqrt{Var[P]}$はポートフォリオの標準偏差を示している。

４－３．解法

ここからは、問３の計算について記載する。
(5)式をもとに、株式のリスク寄与度を下記のように計算する。

$$資産iのリスク寄与度 = Wi \times \frac{Cov[i,P]}{\sqrt{Var[P]}} = 0.4 \times \frac{0.01552}{0.0812} = 0.0764 \fallingdotseq 7.6.$$

上記の計算より答えは 7.6%となる。

５．問 4.

５－１．問題文

はじめに、問４の文章を記載する。
「市場参加者が期待効用関数 U=r_f＋μ_p－1/2τ・$\sigma^2{}_p$ を最大化している場合、市場ポートフォリオ・ウェイト（債券 60%、株式 40%）から逆算される債券および株式の均衡リターン（期待超過リターン・年率）を求めなさい。ただし、r_f は安全資産のリターン、μ_p はポートフォリオの均衡リターン、$\sigma^p{}_2$ はポートフォリオのリターンの分散、τは市場参加者の平均的なリスク許容度で、τ=0.25 とする。」

５－２．用語説明

ここからは、問題文中に出てくる用語について説明していく。まず、「期待効用関数」という単語が冒頭に登場する。この単語を説明する前に、「期待効用理論」について述べておく。「期待効用理論」とは、ポートフォリオを選択する際の指標として、リターンの期待値だけでなく、効用も同時に考えるという理論のことである。「効用」とは、ある選択肢（結果や状態）がもたらす満足度や幸福感を数値で表したもののことである。「期待効用関数」は、投資家のリスクとリターンに対する満足度（効用）を数値化したもので、具体的には、投資家が期待リターンを追求しつつ、リスクをどの程度許容するかという好みを数式として表したものである。「リスク許容度（τ)」は、投資や意思決定においてどれだけのリスクを受け入れることができるか、という度合いを示すものであり、リスク回避度と逆数となっている。また、以下の二つは問題を解く上で理解しておくべき用語である。一つ目に「限界効用」は、ある財やサービスを追加で 1 単位消費したときに得られる効用（満足度）の増加分のことである。二つ目に「限界効用の逓減」とは、ある財やサービスを追加で消費していくと、その財やサービスがもたらす追加的な満足度（限界効用）が次第に減少していく現象のことを言う。

５－３．限界効用の計算式

ここからは、限界効用の計算式について説明していく。限界効用の計算式は下記の通りである。

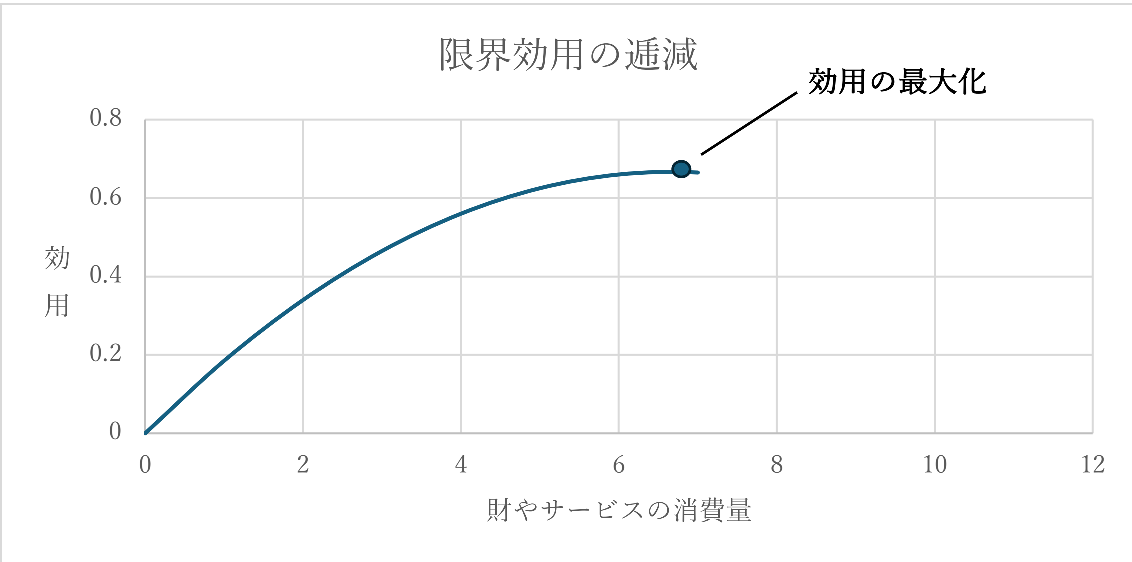
$$MU = \frac{dU}{dW}$$

MU は限界効用、ｄは微分を表す記号、Uは効用で、W はポートフォリオウェイトを表している。（問題文ではｄは∂とされている。）この式では、ポートフォリオウェイト W をほんの少し増やしたときに効用がどれだけ変わるかを考えるとき、dW は小さな増加量、dU はそれによる効用の小さな変化量を表す。

５－４．微分を使う理由

上記の限界効用の式で、微分を使用している。微分は、関数における瞬間的な変化率を計算するものである。この瞬間的な変化率は、グラフの接線の傾きに対応している。また、限界効用の逓減により、財、サービスが一単位増加するごとに効用の増加率は少しずつ減少していく。つまり、グラフの傾きが０の地点において、効用の増加率が０となり、効用が最大化される。したがって、今回の問いでは、効用関数を株式と債券のポートフォリオウェイトで微分した際の解が０になる地点において、効用が最大化されている状態になる。下図は限界効用の逓減をグラフで表したものである。

図表３　限界効用の逓減のグラフ



５－５．解法

ここからは、問４の計算について記載する。まず、μ_p（市場ポートフォリオの均衡リターン）を投資比率で加重平均する。この式が下記のようになる。

$$\mu_p = W_b\mu_b + W_s\mu_s. \quad (6)$$

次に、(4)式を用いて、市場ポートフォリオの分散を次のように置き換える。置き換えた式が下記である。

$$\sigma_p^2 = W_b^2\sigma_b^2 + W_s^2\sigma_b^2 + 2W_bW_sCov[b,s]. \ (7)$$

続いて、期待効用関数 $U=r_f+\mu_p-1/2\tau\cdot\sigma^2_p$ の式に(6)(7)式を代入すると下記のようになる。

$$U = r_f + \mu_p - \frac{1}{2\tau}\cdot\sigma_p^2$$
$$= r_f + (W_b\mu_b W_s\mu_s) - \frac{1}{2\tau}\cdot\left(W_b^2\sigma_b^2 + W_s^2\sigma_s^2 + 2W_bW_sCov[b,s]\right)$$
$$= r_f + W_b\mu_b + W_s\mu_s - \frac{1}{2\tau}\cdot\left(W_b^2\sigma_b^2 + W_s^2\sigma_s^2 + 2W_bW_sCov[b,s]\right)$$

その後、W_b と W_s で、それぞれ微分する。まず、債券の場合を計算していく。
微分した式は下記のようになる。

$$\frac{dU}{dW_b} = \mu_b - \frac{1}{2\tau}\cdot\left(2W_b^2\sigma_b^2 + 2W_sCov[b,s]\right)$$
$$= \mu_b - \frac{1}{\tau}\cdot\left(2W_b^2\sigma_b^2 + 2W_sCov[b,s]\right) = 0$$

ここに数字を当てはめていくと、下記のようになる。

$$\mu_b - \frac{1}{0.25}\cdot\left(0.6\times 0.0016 + 0.4\times(-0.0008)\right) = 0$$

つまり μ_b とマイナス以降の式が同じになるので、以下の式になる。

$$\mu_b = \frac{1}{0.25}\cdot\left(0.6\times 0.0016 + 0.4\times(-0.0008)\right)$$
$$= 4\cdot(0.00096 - 0.00032)$$
$$= 4\cdot 0.00064$$
$$= 0.00256$$
$$= 0.256\%$$

したがって、債権の場合の解は次のようになる。

$$\mu_b = 0.256\%$$

次に、株式の場合を計算していくと、下記のようになる。

$$\frac{dU}{dW_s} = \mu_s - \frac{1}{2\tau}\cdot(2W_s^2\sigma_s^2 + 2W_bCov[b,s])$$

$$= \mu_s - \frac{1}{\tau}\cdot(2W_s^2\sigma_s^2 + 2W_bCov[b,s]) = 0.$$

同様に数字を当てはめていくと、以下のようになる。

$$\mu_s - \frac{1}{0.25}\cdot\left(0.4\times 0.04 + 0.6\times(-0.0008)\right) = 0.$$

先ほどと同様マイナスの前後は同じになるので以下のようになる。

$$\mu_s = \frac{1}{0.25} \cdot \left(0.4 \times 0.04 + 0.6 \times (-0.0008)\right)$$
$$= 4 \cdot (0.016 - 0.00048)$$
$$= 4 \cdot 0.01552$$
$$= 0.06208$$
$$= 6.208\%$$

よって、株式の場合の解は次のようになる。

$$\mu_s = 6.208\%$$

したがって、問４の解答はこのようになる。

$$(\mu_b, \mu_s) = (0.256\%, 6.208\%)$$

６．問５．

６－１．問題文

以下は問 5 の前提文である。

「続いて、ABC 年金基金の基本ポートフォリオを検討することにした。まずは、資産のリスクに着目した「リスク・パリティ・ポートフォリオ」を検討する。」

以下は、問いの本文である。

「リスク・パリティ・ポートフォリオに関し、(1) その概要と、それが平均・分散の観点で最適解となるのはどのような場合か、および (2) 金利水準が歴史的な低水準となっている場合の留意点を、それぞれ簡潔に説明しなさい。」

６－２．(1)の解

リスク・パリティ・ポートフォリオの詳細は補論２を参照せよ。リスク・パリティ・ポートフォリオの概要、またそれが平均・分散の観点での最適解となる場合は次の通りである。リスク・パリティ・ポートフォリオは、資産のリスクが均等になるよう、配分されるポートフォリオのことである。従来の資産配分では、株式が多くなる傾向にあるのに対し、この場合は、債券などの低リスク資産が多くなる傾向にある。これが最適解となるのは、株式と債券のシャープ・レシオが等しい時である。

６－３．(2)の解

同様に、リスク・パリティ・ポートフォリオの詳細は補論２を参照せよ。金利水準が歴史的な低水準となっている場合の留意点は次の通りである。金利が低いと債券のリターンが限られ、また金利が上昇すると、債券価格が下落し、リスクが増大する可能性がある。また、リスク・パリティ・ポートフォリオは債券の比率が大きくなる傾向があるため、このリスクに対して敏感になる。また、リターンが下がることでシャープ・レシオが下がってしまい、リスク・パリティ・ポートフォリオが最適解になら

ない可能性もある。

７．問６．

７－１．問題文

以下は問６の問題文である。

「ABC 年金基金の運用資産の時価は 100 億円であり、1 年間で 10 億円を超えるポートフォリオ価値の下落は避けたいと考えている。この時、期間 1 年、信頼水準 95%のバリュー・アット・リスク(VaR)を-10 億円以内に抑えるためには、ポートフォリオのリスク(リターンの標準偏差・年率)をいくら以内に抑える必要があるか、計算しなさい。なお、ここではポートフォリオの期待リターン(年率)は 0%、リターンは正規分布に従うと仮定して、図表４.標準正規分布表を用いて%表示で小数第 1 位まで求めること(小数点第 2 位切捨て)。」

問題文は以上のとおりである。ポートフォリオの時価が 100 億円であり、これを一年間運用した際の VaR が-10 億円以内となるようなポートフォリオのリスクを求めよという問である。

７－２．解法

VaR の公式に問題文から読み取れる値をそれぞれ代入して求める。VaR の公式の立式については補論３を参照せよ。z の値については今回の場合標準正規分布表が与えられているため、そちらから代入する。

図表４　標準正規分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133

.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

(出所)　証券アナリスト２次試験過去問題

縦軸が z 値の少数第 1 位までの数値、横軸が z 値の少数第 2 位の数値であり、それに対応する信頼水準が記載されている。今回の場合は信頼水準が 95%と設定されているため、内部の数値で 0.95 を探す。すると 0.95 ぴったりはないが、0.945 と 0.955 があり、その中間地を取ることとする。対応する縦軸は 1.6、横軸が.04 と.05 の中間であるため.045 となる。これにより信頼水準 95%時の z 値が 1.645 であると分かる。これらの数値を公式に代入していく。

$$VaR = Vp \times (\mu - z\sigma). \quad (8)$$

(8)式が VaR の公式であり、Vp がポートフォリオの現在価値、μ がリターンの平均値、 z が信頼係数、σ が標準偏差となっている。６－１で記した問題文よりそれぞれに値を代入し算出する。

$$-10\text{億} = 100\text{億} \times (0 - 1.645 \times \sigma)$$
$$-10\text{億} = 100\text{億} \times 1.645\sigma$$
$$\sigma = 0.06079.$$

問題文に解は%表示で小数第 1 位まで求める（小数第 2 位切り捨て）と記載があるため、答えは 6.0%となる。この解は、ポートフォリオのリスクを 6%以内にすると、95%の確率で最大損失額が 10 億円に収まるということを表している。

８．問７．

８－１．問題文

以下が問７の問題文である。

「基本ポートフォリオを決定し、ABC 年金基金の資産 100 億円を同ポートフォリオで運用したところ、その後 2 年間の時価は図表 5 のように推移した。ただし、1 年経過した直後(2 年度初)に、母体企業の企業買収に伴う年金加入者の増加により、運用資産額が新規に 20 億円追加されている。図表５に基づき、この 2 年間のポートフォリオの(1)時間加重収益率（年率)、および(2)金額加重収益率（年率）を計算し、(3)ポートフォリオのパフォーマンス(基金の運用能力)を評価するのにどちらの収益率を用いるのが適切か、理由と共に説明しなさい。」

図表５　ABC 年金基金のポートフォリオ時価及び新規追加資金の推移

年度	年度初のポートフォリオ時価(億円)	年度末のポートフォリオ時価(億円)
1	100	90
２	110 (うち、20 が新規追加資金)	143

ポートフォリオを運用した際の成果が上記の図表 5 の通りである。１年目は 100 億円から 90 億円に減らしたものの、2 年目には追加資金 20 億円を含み運用し、143 億円まで増やしている。この時、2 つの運用評価方法を用いて、収益率を求め、どちらの評価方法が年金基金のパフォーマンスを評価するのに適しているのかを問う問題である。順に解いていく。

８－２－１．時間加重収益率の説明

ここからは８－１の(1)の時間加重収益率について解説していく。時間加重収益率とは、運用機関の意思によってコントロールできない運用期間中のキャッシュフローの影響を排除して求める手法である。つまり今回の問題で言うと、20 億円の追加資金という金額面での影響を考慮せず、純粋な各年の増益率で考える考え方である。Ito, Ogisima and Suwabe(2009)より時間加重収益率の公式は、

$$r,twr = (\ 1 + r,t1) \times (\ 1 + r,t2) \times \ldots \times (\ 1 + r,tn) - 1. \quad (9)$$

であり、各年の増益率の求め方は、

$$r,t=\frac{(MV1-MV0)}{MV0}. \quad (10)$$

であり、r,twr は時間加重収益率、rt は期間 t の投資収益率、MV1 は期末 1 時点の価値、MV0 は期首 0 時点の価値となっている。(9)式を見ると、期首の 1 単位当たりの評価期間内における複利成長率を示していることが分かり、期首の投資価値が第 1 期間で増加し、その投資価値がその次の第２期間で再投資されていると解釈できる。つまり、期首の投資価値が最後にどの程度まで成長したかを示しているのだ。

８－２－２．幾何平均

８－２－１において時間加重収益率の公式を示したが、(9)式のみでは単なる収益率であり、今回の問題の解に必要な年率にはなっていないと言える。結論から言うと幾何平均の考え方を用いる必要があり、その理由を説明していく。一度、単純な複利計算として今回の問題を考えてみると、

$$100\ 万円\times(1+r)^2=143\ 万円, \quad (11)$$

と表せる。しかし、今回の問題では途中に追加資金があるため、この考え方では正確な収益率を求めることができていない。次に、時間加重収益率の考え方である増益率で考えてみると、

１年目：90/100=0.9,
２年目：143/110=1.3,

となり、追加資金を加味した増加率を求めることができている。そして、この 1 年目と２年目の増加率を掛け合わせた数値が、(11)式の$(1+r)^2$と本来等しくなるはずである。そのため、

$$(1+r)^2=0.9\times1.3,$$
$$(1+r)=(0.9\times1.3)^{\frac{1}{2}},$$

このように置き換えることができ、式に 1/2 乗する必要があることが分かる。これは幾何平均の考え方であり、t 年スポットレート r は、t 年後までの t 個の 1 年フォワードレートの幾何平均であるということを示している。よって、元の式を 1/t 乗する必要があるのだ。つまり、

$$r,twr+1=\{(1+rt,1)\times(1+rt,2)\times\ldots\times(1+rt,n)\}^{\frac{1}{t}},\quad (12)$$

という式が年率を求める際の時間加重収益率の公式であると分かる。

８－２－３．解法

(12)式に問題の情報を踏まえそれぞれ代入していく。

$$rt,1=90\text{-}100/100=\text{-}0.1,$$
$$rt,2=143\text{-}110/110=0.3,$$

$$r,twr+1=\{(1+rt,1)\times(1+rt,2)\times\ldots\times(1+rt,n)\}^{\frac{1}{t}}$$

$$r,twr+1=\{(1-0.1)\times(1+0.3)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$r,twr+1=(0.9\times1.3)^{\frac{1}{2}}$$

$$r,twr+1=1.17^{\frac{1}{2}}$$

$$r,twr+1=1.081665\ldots$$
$$t,twr=0.081665\ldots$$

よって、時間加重収益率（年率）における解は 8.17%となる。

８－３－１．金額加重収益率の説明

次に、８－１の(2)の金額加重収益率について解説していく。金額加重収益率とは、初期の元本と期中に追加されたキャッシュフローをすべて同じ収益率で運用したものが期末の時価総額になるときの収益率のことである。いわば、パフォーマンス測定期間中の内部収益率ということであり、考え方は複利最終利回りに基づく。Ito, Ogisima and Suwabe(2009)より公式は、

$$MV1=MV0(\mathit{1}+R)^{m}+CF\,\mathit{1}(1+R)^{m-L(1)}+\cdots+CF\,n(\mathit{1}+R)^{m-L(n)}.\quad (13)$$

であり、MV1 は測定期間中の期末ポートフォリオ価値、MV0 は測定期間中の期初ポートフォリオ価値、m は評価期間の時間単位数、CFn は第 n 番目のキャッシュフロ

一、L(n)は第 n 番目のキャッシュフローの発生した時点、R は内部収益率(金額加重収益率)となっている。分かりやすく日本語に直すと、

最終的な資金額
=最初資金×(1+R)^m+追加資金×(1+R)^(m-1)+…+追加資金 n×(1+R)^(m-n).

と表すことができ、最初の資金をキャッシュフローの影響も加味して一定の収益率で運用していることが分かる。このことから、キャッシュフローの影響を加味するという点が時間加重収益率とは違った点であるということも分かる。

８－３－２．解法

(13)式に値を代入して R（内部収益率）を求めていく。

$$143 = 100 \times (1+R)^2 + 20 \times (1+R)^1$$
$$143 = 100 \times (1 + 2R + R^2) + 20 + 20R$$
$$0 = 100R^2 + 220R - 23.$$

２次方程式となったため、解の公式を用いる。解の公式とは、二次方程式を$ax^2 + bx + c = 0$　という形で表す時、解は　$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　で求めることができるというものである。これを用いると、

$$R = \{-220 + \sqrt{(220^2 - 4 \times 100 \times -23\}}$$
$$R=0.1,-2.3$$

となる。今回の問題の解として収益率が-230%というのは不適当であるため、10%が解となる。

８－４－１．時間加重収益率と金額加重収益率の特徴

ここからは８－１の(3)について解いていくために、まずはそれぞれの特徴を挙げていく。時間加重収益率の第一の特徴としては、資金の流入や流出に関わらず、運用自体のパフォーマンスを測るのに適しているという点が挙げられる。（１）で解説した通りキャッシュフローの影響を考慮しないため、キャッシュフローの大きさや投入時期を自ら決めることができない外部委託マネージャのパフォーマンス評価に最適である

と言える。また、各年における資金の変化率を複利によって計算したものであるというのも一つ特徴である。

次に金額加重収益率についてだ。この収益率では、最初と途中のキャッシュフローの変化を考え、複利で計算したものであり、投資資金全ての平均的な投資収益率を表している。このことから、キャッシュフローの影響を考慮していることが分かる。これは実際の資金フローを考慮した算出方法であるということであり、キャッシュフローの大きさや投入時期についての裁量権のある投資家自身の投資成果を測るのに最適であると言える。この時注意しなければならない点が一つある。それは、キャッシュフローが追加資金なのか利益なのかは式のみでは断定できないという点であり、式のみを見て投資家の行動、投資成果を断定することはできないということを念頭に置き使用する必要がある。

８－４－２．結論

８－４－１に記した２つの収益率の特徴から、今回の問を解いていく。今回の問としてはポートフォリオのパフォーマンス評価（基金の運用能力）に最適な収益率はどちらかという問題であった。２つを比較した時、運用自体のパフォーマンスを測るのに適していたのは時間加重収益率であったため、時間加重収益率がこの問の解である。

補論１．資産のリスク寄与度を求める公式の導出

ここでは、資産のリスク寄与度を求める公式の導出を行う。

補論１－１．マーケットモデル

補論１－１—１．用語説明

はじめに、リスク寄与度の公式を求めるうえで必要となるマーケットモデルについて説明していく。マーケットモデル（これ以降は MM と表記する）とは、個々の資産やポートフォリオのリターンが、市場ポートフォリオのリターンによって説明できると考えたモデルのことである。MM の公式は佐野三郎(2022)が書いた「2022 年度版証券アナリスト第２次レベル」において、以下のように記載されている。

$$Ri = \alpha i + \beta i \times RM + \varepsilon i. \quad (14)$$

(14)式において、Ri は資産 i のリターン、αi は資産 i のリターンの内、市場ポートフォリオのリターンに影響されない部分、βi は資産 i の市場ポートフォリオのリターンに対する感応度、RM は市場ポートフォリオのリターン、εi はその時々に偶然に決まる、固有のリターンを示している。

上記の文字式にはそれぞれ特徴がある為、説明していく。はじめに、Ri についてである。Ri はＲＭによって変動する関心のある数値の為、従属変数である。次に、αi に

ついてである。αi は RM が変動しても変わらない数値のため、定数である。次に、βi についてである。βi は RM が変動しても変わらない数値のため、定数である。次に RM である。RM は MM の式において変動させることで他の数値を求める数値なので、独立変数である。次に εi である。εi はその時々によって変動する数値の為、確率変数である。また、ε には３つの固有な特徴がある為、説明していく。1 つ目は、RM とは無関係であるため、RM との共分散は 0 になる事である。2 つ目は、予想がつかないことから期待値は 0 とされている事である。3 つ目は異なる資産の ε 同士も無関係であるため、ε 同士の共分散は 0 になる事である。

補論１－１—２．MM から求める分散

次に MM から資産 i の分散（リスク）を求めていく。
資産 i のリスクは MM を用いると下記のように示せる。

$$Var(Ri) = Var(\alpha i + \beta i \times RM + \varepsilon i). \quad (15)$$

αi の特徴は定数なので、分散では無視できるため、(15)式は下記のような式となる。

$$Var(Ri) = Var(\beta i \times RM + \varepsilon i). \quad (16)$$

(16)式は分散の足し算なので、下記のように変形できる

$$\begin{aligned} Var(Ri) &= Var(\beta i \times RM + \varepsilon i) \\ &= \beta i^2 \times Var(RM) + 1^2 \times Var(\varepsilon i) + \\ &\quad 2 \times \beta i \times 1 \times Cov(RM, \varepsilon i). \quad (17) \end{aligned}$$

ε の固有の特徴より、RM と ε の共分散は 0 となる為、(17)式は下記のような式となる。

$$\begin{aligned} Var(Ri) &= \beta i^2 \times Var(RM) + 1^2 \times Var(\varepsilon i) + 2 \times \beta i \times 1 \times Cov(RM, \varepsilon i) \\ &= \beta i^2 \times Var(RM) + Var(\varepsilon i). \quad (18) \end{aligned}$$

(18)式をまとめると以下の式となる。

$$Var(Ri) = \beta i^2 \times Var(RM) + Var(\varepsilon i). \quad (19)$$

ここで(19)式の見方について説明していく。はじめに Var(Ri)についてである。Var(Ri)は資産 i 全体のリスクを表しており「トータルリスク」と言われる。次に $\beta i^2 \times Var(RM)$についてである。$\beta i^2 \times Var(RM)$は資産 i の内、RM によって影響される部分のリスクを表しており「システマティック・リスク」と言われる。最後に Var(εi)についてである。Var(εi)は、資産 i の内、RM の影響以外の資産固有リスクを表しており「アンシステマティック・リスク」と言われている。

補論１－１—３．MM から求めるポートフォリオのリターン

次に MM が成り立つ場合において、2 資産で構成されるポートフォリオのリターンの式を求めていく。

はじめに 2 資産で構成されるポートフォリオのリターン式は以下のようになる。

$$RP = w1 \times R1 + w2 \times R2. \quad (20)$$

(20)式において、RP はポートフォリオのリターン、RM は市場ポートフォリオのリターン、W1 は資産１のウェイト、R1 資産１のリターン、W2 は資産 2 のウェイト、R2 は資産２のリターンを示している。

R1、R2 を MM の公式に当てはめると上記式は下記のような式になる。

$$RP = w1 \times R1 + w2 \times R2 = w1(\alpha1 + \beta1 \times RM + \varepsilon1) + w2(\alpha2 + \beta2 \times RM + \varepsilon2). \quad (21)$$

(21)式において、α1 は資産 1 のリターンのうち、市場ポートフォリオのリターンに影響されない部分、β1 は資産 1 の市場ポートフォリオのリターンに対する感応度、ε1 は資産１のうち、その時々に偶然に決まる、固有のリターン、α2 は資産 2 のリターンのうち、市場ポートフォリオのリターンに影響されない部分、β2 は資産 2 の市場ポートフォリオのリターンに対する感応度、ε2 は資産 2 のうち、その時々に偶然に決まる、固有のリターンを示している。

(21)式を変形すると下記のような式になる。

$$\begin{aligned} RP &= w1(\alpha1 + \beta1 \times RM + \varepsilon1) + w2(\alpha2 + \beta2 \times RM + \varepsilon2) \\ &= (w1 \times \alpha1 + w2 \times \alpha2) + (w1 \times \beta1 + w2 \times \beta2)RM + \\ &\quad (w1 \times \varepsilon1 + w2 \times \varepsilon2). \quad (22) \end{aligned}$$

(22)式で扱った文字式にはそれぞれ特徴がある為、説明していく。はじめに、RP、R1、R2 についてである。RP、R1、R2 はＲＭによって変動する関心のある数値の為、従属変数である。次に、α1、α2 についてである。α1、α2 は RM が変動しても変わらない数値のため、定数である。次に、β1、β2 についてである。β1、β2 は RM が変動しても変わらない数値のため、定数である。次に RM である。RM は MM の式において変動させせることで他の数値を求める数値なので、独立変数である。最期に ε1、ε2 である。ε1 、ε2 はその時々によって変動する数値の為、確率変数である。

補論１－１―４．MM から求めるポートフォリオの分散

次に MM を用いて、2 資産で構成されているポートフォリオの分散を求めていく。RP の分散は MM を用いると次のように表せる。

$$Var(RP) = Var[(w1 \times \alpha1 + w2 \times \alpha2) + (w1 \times \beta1 + w2 \times \beta2)RM + (w1 \times \varepsilon1 + w2 \times \varepsilon2)]. \quad (23)$$

α1、α２の特徴として定数なので、分散では無視できるため、(23)式は下記のような式となる。

$$Var(RP) = Var[(w1 \times \beta1 + w2 \times \beta2)RM + (w1 \times \varepsilon1 + w2 \times \varepsilon2)]. \quad (24)$$

(24)式は分散の足し算なので、下記のように変形できる。

$$Var(RP) = (w1 \times \beta1 + w2 \times \beta2)^2 \times Var(RM) + 1^2 \times Var(w1 \times \varepsilon1 + w2 \times \varepsilon2) + 2 \times (w1 \times \beta1 + w2 \times \beta2) \times 1 \times Cov[RM、(w1 \times \varepsilon1 + w2 \times \varepsilon2)]. \quad (25)$$

εの固有の特徴より、RMとεの共分散は0となる為、(25)式は下記のような式となる。

$$\begin{aligned}Var(RP) &= (w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM)+1^2\times Var(w1\times\varepsilon1+w2\times\varepsilon2)\\&\quad+2\times(w1\times\beta1+w2\times\beta2)\times1\times Cov[RM、(w1\times\varepsilon1+w2\times\varepsilon2)]\\&=(w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM)+Var(w1\times\varepsilon1+w2\times\varepsilon2).\quad(26)\end{aligned}$$

次に、(26)式の第2項である$Var(w1\times\varepsilon1+w2\times\varepsilon2)$を計算していく。この項は分散の足し算なので、下記のように変形できる。

$$\begin{aligned}Var(RP) &= (w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM)+Var(w1\times\varepsilon1+w2\times\varepsilon2)\\&=(w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM)+w1^2\times Var(\varepsilon1)+w2^2\times\\&\quad Var(\varepsilon2)+2\times w1\times w2\times Cov(\varepsilon1,\varepsilon2).\quad(27)\end{aligned}$$

εの固有の特徴より、ε同士の共分散は0となる為、(27)式は下記のような式となる。

$$Var(RP)=(w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM)+w1^2\times Var(\varepsilon1)+w2^2\times Var(\varepsilon2).\quad(28)$$

(28)式において、$\beta P=w1\times\beta1+w2\times\beta2$、w1=$\frac{1}{2}$、w2=$\frac{1}{2}$をそれぞれ代入すると、下記の式のようになる。

$$Var(RP)=\beta P^2\times Var(RM)+(\tfrac{1}{2})^2\times Var(\varepsilon1)+(\tfrac{1}{2})^2\times Var(\varepsilon2).\quad(29)$$

(29)式において、$Var(\varepsilon1)=\sigma\varepsilon^2$、$Var(\varepsilon2)=\sigma\varepsilon^2$をそれぞれ代入すると、下記のような式になる。

$$Var(RP)=\beta P^2\times Var(RM)+(\tfrac{1}{2})^2\times\sigma\varepsilon^2+(\tfrac{1}{2})^2\times\sigma\varepsilon^2=\beta P^2\times Var(RM)+\tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon^2.\quad(30)$$

(30)式において、第2項の分母は資産の数を表している。つまり、資産の数が大きくなるほど誤差項の分散（アンシステマティックリスク）が小さくなり、最後にはゼロに収束する。そのため、MMが成り立つ場合、分散投資をするポートフォリオにおいて、アンシステマティックリスクは無視することが出来る。そのため、(30)式は下記の式に変更できる。

$$Var(RP)=\beta P^2\times Var(RM)+\tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon^2=\beta P^2\times Var(RM).\quad(31)$$

(31)式において$w1\times\beta1+w2\times\beta2=\beta P$を代入すると下記の式になる。

$$Var(RP)=\beta P^2\times Var(RM)=(w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2\times Var(RM).\quad(32)$$

(32)式では分散を求めている為、標準偏差を求める式に変形すると下記の式になる。

$$\begin{aligned}\sqrt{Var(RP)}&=\sqrt{(w1\times\beta1+w2\times\beta2)^2}\times\sqrt{Var(RM)}\\&=(w1\times\beta1+w2\times\beta2)\times\sqrt{Var(RM)}\end{aligned}$$

$$= (w1 \times \beta 1) \times \sqrt{Var(RM)} + (w2 \times \beta 2) \times \sqrt{Var(RM)}. \quad (33)$$

(33)式のように計算した場合、ポートフォリオのリスクにおいて、資産 1 が原因となっている部分は$(w1 \times \beta 1) \times \sqrt{Var(RM)}$であると考えられる。
そのため、$(w1 \times \beta 1) \times \sqrt{Var(RM)}$を計算していく。この式に$\beta 1 = \frac{Cov(R1,RM)}{\sigma^2 RM}$、$\sqrt{Var(RM)} = \sigma RM$を代入すると下記のような式になる。

$$(w1 \times \beta 1) \times \sqrt{Var(RM)} = w1 \times \frac{Cov(R1,RM)}{\sigma^2 RM} \times \sigma RM = w1 \times \frac{Cov(R1,RM)}{\sigma RM} \quad (34)$$

(34)式から、ポートフォリオにおける 1 資産のリスク寄与度は$w1 \times \frac{Cov(R1,RM)}{\sigma RM}$で求めることが出来るとわかる。

補論２．リスク・パリティについて

ここでは、リスク・パリティについての詳細な説明を行う。

補論２－１．用語説明

補論では、リスク・パリティについて説明をする。リスク・パリティとは、低リスク資産の配分比率を高く、高リスク資産の配分比率を低くする戦略のことである。これにより、リスク寄与度を平準化することで、本来のリスクに基づいた分散投資ができる。リスク寄与度とは、ポートフォリオ全体のリスクに対して、各資産がどれだけリスクを寄与しているかを示す指標のことである。リーマンショック以前までは、株式 60%、債券 40%の割合が主流だったが、リーマンショックの影響で株式が暴落した際に、分散投資が適切にできていないことが露呈し、リスク・パリティ戦略が注目されるようになった。

補論２－２．リスク・パリティの計算

図表６　リスク・パリティの計算の数値例

	期待リターン	標準偏差	シャープ・レシオ	相関係数
株式	9%	20%	$\frac{9\%-1\%}{20\%}=0.4$	0
債券	3%	5%	$\frac{3\%-1\%}{5\%}=0.4$	0

(出所)　証券アナリスト２次試験過去問題　解説文

ここからは上記の数値例で、リスク・パリティについて計算していく。計算を簡単にするため、株式と債券の相関は0、リスクフリーレートは1%とする。まず仮に株式50%、債券50%で考えると期待リターン、標準偏差は以下のようになる。

期待リターン$\ldots E(r_p)=0.5\times 9\%+0.5\times 3\%=6\%.$　(35)

標準偏差　　$\ldots \sigma_p=\sqrt{0.5^2\times 20^2+0.5^2\times 5^2}=\sqrt{100+6.25}$

$=10.307\ldots$

$\approx 10.31\%.$ (36)

期待リターンは6%、標準偏差は約10.31%と分かった。次に、この状態でのシャープ・レシオ（SR）を計算していく。シャープ・レシオは、投資のリスクに対するリターンの効率を測る指標であり、高い方がより効率的な投資をできているということになる。シャープ・レシオの計算方法は下記の通りである。

$$シャープ・レシオ=\frac{期待リターン-無リスク利子率}{ポートフォリオ全体のリスク(標準偏差)}$$

この式に先ほどの(35) (36)の解を当てはめて計算すると、次のようになる。

$$シャープ・レシオ=\frac{6\%-1\%}{10.31\%}=0.4849\ldots\approx 0.48$$

このように、シャープ・レシオは約0.48となる。相関係数を0としているため、分散効果が働くことで、リスクが低減され、シャープ・レシオが改善されているが、リスクの大半を株式が占めている。先ほども述べたが、リスク・パリティ戦略とは、低リスク資産の配分比率を高く、高リスク資産の配分比率を低くする戦略のことである。つまり、それぞれの標準偏差を逆数にして、投資比率とすれば、リスク寄与度を平準化することができる。株式、債券の配分比率は下記のようになる。

	標準偏差の逆数	配分比率
株式	$\frac{1}{0.2}=5$	$\frac{5}{5+20}=20\%$

債券 $\dfrac{1}{0.05}=20$ $\dfrac{20}{5+20}=80\%$

株式の標準偏差は、図表 6 より 0.2 なので、逆数にすると 5。債券の標準偏差も同様 0.05 なので逆数にすると 20。この逆数を比率に直すと、株式が 20%、債券が 80%となる。次はこの配分比率で期待リターンと標準偏差を計算してみる。

期待リターン $E(r_p)=0.2\times 9\%+0.8\times 3\%=4.2\%$ (37)

標準偏差 $\sigma_p=\sqrt{0.2^2\times 20^2+0.8^2\times 5^2}=\sqrt{16+16}$

$=5.656\ldots$

$\approx 5.66\%$ (38)

このように、期待リターンは 4.2%、標準偏差は約 5.66%と分かる。(37)(38)の数値を使って、シャープ・レシオを計算する。

$$シャープ・レシオ=\frac{4.2\%-1\%}{5.66\%}=0.5653\ldots\approx 0.57$$

今回のシャープ・レシオは約 0.57 となる。このように、シャープ・レシオはかなり改善される。また、リスク・パリティが最適解となる条件として、それぞれの資産に対するシャープ・レシオが等しくある必要がある。これは、高リスク資産はリターンが高く、低リスク資産はリターンが低いことにより、シャープ・レシオが異なると、ある資産に同じリスク量を配分したときに期待できるリターンも異なり、結果としてポートフォリオ全体でリスク寄与度が偏ってしまうためである。リスク・パリティでは各資産のリスク寄与度を均等にすることが目標であるため、シャープ・レシオが等しい必要がある。

ここからは、リスク・パリティが最適解となることを確認していく。まず、問 4 同様に、期待効用関数を使用する。そして、W_s と W_b を元に式を並び替える。

$$U=0.09W_s+0.03W_b+0.01(1-W_s-W_b)-\frac{1}{2\tau}\times(0.2^2W_s^2+0.05^2W_b^2)$$

$$=(0.09-0.01)W_s+(0.03-0.01)W_b+0.01-\tfrac{1}{2\tau}\times(0.2^2W_s^2+0.05^2W_b^2).\ (39)$$

並び替えた結果、上記のようになる。次に、(39)式を元に問 4 同様微分を行う。W_s と W_b でそれぞれ微分をする。今回は期待効用が最大化する場合の配分を考えたいので、それぞれ＝0 となる。下記は、微分を行った結果である。

$$\frac{dU}{dW_s}=(0.09-0.01)-\tfrac{1}{2\tau}\times 2\times 0.2^2W_s\ \ =(0.09-0.01)-\tfrac{1}{\tau}\times 0.2^2W_s\ \ =0.\ (40)$$

$$\frac{dU}{dW_b}=(0.03-0.01)-\tfrac{1}{2\tau}\times 2\times 0.05^2W_b\ \ =(0.03-0.01)-\tfrac{1}{\tau}\times 0.2^2W_s\ \ =0.\ (41)$$

計算の結果は上記のようになる。(40)(41)式をそれぞれ W_s、W_b(投資比率)＝の形に並び替える。また、ここでは分かりやすくするため、一度文字に置き換えている。計算

は下記の通りである。

$$W_s = \frac{0.09-0.01}{0.2^2}・\tau = \left(\frac{0.09-0.01}{0.2}\right)・\left(\frac{1}{0.2}\right)・\tau = \left(\frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s}・\frac{1}{\sigma_s}\right)・\tau. \quad (42)$$

$$W_b = \frac{0.03-0.01}{0.05^2}・\tau = \left(\frac{0.03-0.01}{0.05}\right)・\left(\frac{1}{0.05}\right)・\tau = \left(\frac{\mu_b - r_f}{\sigma_b}・\frac{1}{\sigma_b}\right)・\tau. \quad (43)$$

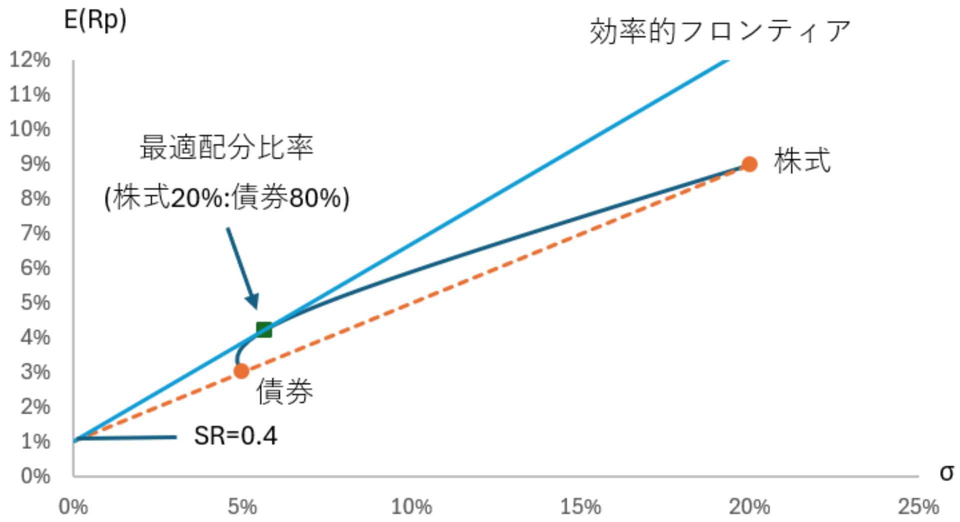
上記のような計算結果になる。次に、(42)(43)を対比として並べる。その際、リスク許容度τは消える。また、シャープ・レシオの部分も株式と債券は等しくなるので、同様に消える。答えは 5：20 となり、最初のリスク・パリティの比率と一致する。下記の計算の通りである。

$$W_s : W_b = \frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s}・\frac{1}{\sigma_s} : \frac{\mu_b - r_f}{\sigma_b}・\frac{1}{\sigma_b} = \frac{1}{\sigma_s} : \frac{1}{\sigma_b} = \frac{1}{0.2} : \frac{1}{0.05} = 5 : 20$$

このようにして、最適配分比率が 5：20 となり、正しいことが分かった。また、この投資比率を求める際に、途中でリスク許容度τが消えている。つまり、投資の最適配分比率に、投資家のリスク許容度は影響されないということも分かる。これはトービンの分離定理として知られている。

トービンの分離定理は、投資家の資産配分を効率的に行うための基本的な原則であり、リスク資産の選択とリスク許容度に基づく資産配分は分離されることを示している。この定理に基づいて配分を決める際には以下の手順で行う。まずリスク資産のみのポートフォリオを構築する。基本的にはシャープ・レシオが最大のものを選ぶ。次に、このリスク資産のみのポートフォリオと無リスク資産の配分を、投資家自身のリスク許容度に基づいて決める。このようにして、それぞれの投資家が納得のいく資産配分を決める。つまり、トービンの分離定理は、リスク資産の選択とリスク許容度に基づく資産配分を分離できることを示している。これにより、リスク許容度が異なる投資家でも、共通のリスク資産ポートフォリオを基盤とし、個々のニーズに応じて資産配分が調整できるようになるという考え方。

図表 7　効率的フロンティアと最適配分比率のグラフ



(出所)　証券アナリスト2次試験過去問題 解説文

この図では、点線が切片1（＝リスクフリーレート）、傾きが0.4（＝シャープレシオ）となっており、その上に債券、株式の点がある。効率的フロンティアとの接点（最適配分比率）は、債券80%、株式20%となる。SRは傾きだが、最適投資比率0.57の場合は実践部分の傾きになる。

補論３．VaRと正規分布について

ここでは、第7章で登場したVaRについて解説していく。

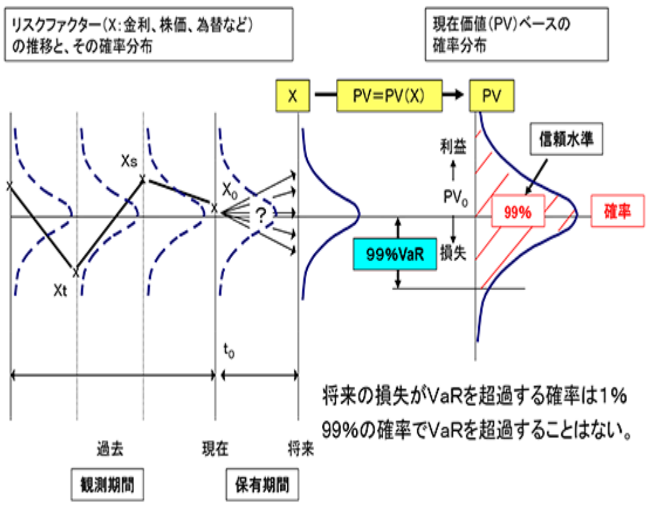
補論３－１．VaR（バリュー・アット・リスク）について

VaRとは、端的に言うと一定期間に一定確率で発生しうる最大損失想定額、または予想最大損失額である。今現在持っている資産を今後も一定期間保有し続けたとして、株価や金利などの変動（リスクファクター）にさらされることで、ある一定の確率の範囲内（信頼水準）で、どれくらい損失を被る可能性があるのかを表し、過去のデータをもとに統計的に計測する手法のことである。この手法のデメリットとしては、過去のデータを用いた手法であるため、過去に経験したことのないような事象には対応しにくく、最近の事例でいうとコロナのパンデミックなどが挙げられる。

補論３－２正規分布

次に正規分布についてである。VaR は通常、正規分布の考え方を用いるため説明する。まず、正規分布とは横軸に確率変数、縦軸に確率密度をとり、ある事象の発生確率を計算する手法である。正規分布は確率分布であるため、内部の面積は全体で 1.0（100%）となる。ある値からある値までの区間を線分で区切り、その内部の面積を求めることにより、その範囲の値が起こる得る確立を計算することができるのだ。そして、VaR における正規分布では、収益率（リターン）の散らばりをリスクとして評価している。

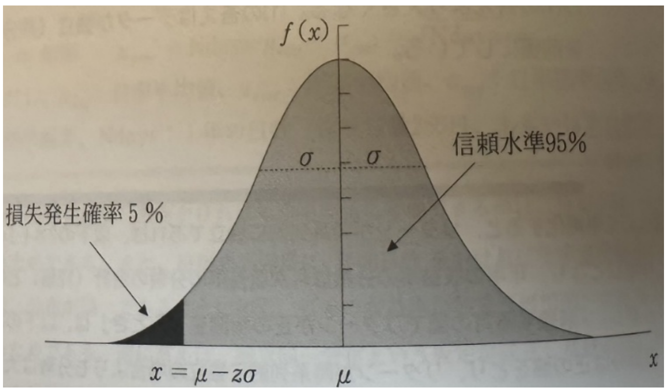
図表８　VaR の正規分布におけるイメージ図



(出所)　碓井茂樹. (2013). “市場リスクの把握と管理”セミナー資料. 日本銀行金融機構局金融高度化センター

図表８で簡単に解説すると、VaR とは 99%の確率の範囲をとった場合に、その範囲内で資産価値に生じる最大損失額、つまり赤い面積部分の最低値の値のことを指す。

図表９　VaR の正規分布表



(出所)　TAC 株式会社. (2023). 2024 年試験対策証券アナリスト２次対策総まとめテキ

スト. TAC 出版

図表８では 99％の確率の範囲をとったと簡易的に説明したが、では具体的に x 軸の値はいくつをとるのだろうか。この時考えるのが図表 9 の考え方である。それぞれ文字の説明をすると、μ がリターン平均値、σ が標準偏差、 z が信頼係数、 x が収益率(損失率)を表している。この時、リターン平均値 μ から何標準偏差分離れているのかを z と置いて考えるとき、この z の部分を算出することができれば、確率を下回る、あるいは上回る面積を正確に読み取ることができる。

補論３－３．標準化

正規分布表のみでは z 値が定まらず、確率の算出が困難である。この時、正規分布を標準化し、標準正規分布から確率や信頼係数を読み取るという方法が必要となる。確率変数Ｘをｚに変換する、つまり標準化することで、標準正規分布表から z 値を下回る面積、上回る面積を読み取ることが可能になる。標準化する手段としては、まず確率変数 X から平均である μ を引くと、

$$X-\mu, \quad (44)$$

となり、(44)式を σ で割ると、

$$(X-\mu)/\sigma, \quad (45)$$

という形になり、この(45)式が Z を表す式となる。正規分布では、確率変数Ｘが期待値 μ、分散σ^2に従うが、Ｚは平均 0、分散 1 の正規分布に従う形となる。

補論３－４．VaR の立式

ここからは、以上の情報を踏まえ VaR の立式をしていく。ここで VaR はリターン x (収益率、損失率)が正規分布に従うと仮定し計算することとする。まず、元の正規分布で平均を下回り、ダウンサイド（左側）の面積が 5%（仮定）となるような x は平均値 μ から何標準偏差（zσ）離れているのかを図表 9 をもとに考えると、

$$x = \mu - z\sigma, \quad (46)$$

という形で x を表すことができる。VaR は損失額であるため、ポートフォリオの時価（Vp）に x%をかければよいため、(46)式を用いると、

$$VaR = Vp \times x,$$
$$VaR = Vp \times (\mu - z\sigma), \quad (47)$$

と表現することができ、(47)式が VaR の公式となる。

【参考文献】

・伊藤敬介,萩島誠治,諏訪部貴嗣. (2009). 新・証券投資論II実務編. 日本経済新聞出版

・佐野三郎. (2022). 2022 年度版証券アナリスト第２次レベル. ビジネス教育出版

・TAC 株式会社. (2023). 2024 年試験対策証券アナリスト２次対策総まとめテキスト. TAC 出版

・勝俣良介.(2021). “VaR(バリュー・アット・リスク/予想最大損失額)｜リスク管理 Navi[用語集]”. ニュートン・コンサルティング. https://www.newton-consulting.co.jp/bcmnavi/glossary/VaR.html

・碓井茂樹. (2013). “市場リスクの把握と管理”セミナー資料. 日本銀行金融機構局金融高度化センター https://www.boj.or.jp/finsys/c_aft/basic_seminar/data/rel130618b2.pdf

・太田浩司. (2010). 企業財務論 講義資料 https://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~koji_ota/Lecture_Kigyouzaimuron/kigyouzaimuron2010_19.pdf

・山寄輝. 確立統計入門 講義資料 http://akira2yamazaki.com/03seminar_material/01_Probability.pdf