卒業レポート

先物取引、オプション戦略、ダイナミック・ヘッジ

山嵜ゼミ４年　都　啓大

目次

1. はじめに

設定された問題は、資産家 A 氏の株式投資において現在、日経平均株価と同じ構成で時価が 5,000 百万円の株式ポートフォリオを保有している状況である。そこで、デリバティブを用いて、リスクとリターンの調整を行うことが目的である。その調整の手法を問題ごとに少しずつ変化させており、一つ一つの手法を解法と共に説明、理解を深めていく。

2. 問題文の説明

2.1 問題文

資産家 A 氏は自ら株式投資を行っている。その株式ポートフォリオは日経平均株価（日経平均）と同じ構成で時価は 5,000 百万円であるが、当面、株式運用から大きな収益は必要ないと考えている。そこで、デリバティブを用いて、株式ポートフォリオのリスクとリターンの調整を検討することにした。

図表 1 は、現在の日経平均および日経平均を原資産とするデリバティブのデータである。デリバティブの満期はすべて半年後であり、以下で検討する収益も半年後を対象とする。また、問 4 を除き、取引は現時点に 1 回行うのみで以降の調整は行わないものとする。なお、金額は、百万円単位で整数で答えること。

図表 1　**日経平均および日経平均を原資産とするデリバティブ**

日経平均（円）			20,000	
日経平均先物（円）			20,200	
オプション		行使価格（円）	価格（円）	デルタ
	コール	20,000	1,050	0.58
		21,000	580	0.41
	プット	18,000	350	-0.18
		20,000	965	-0.42

（注）

・半年後までのリスクフリー・レートは一定で、2.00%（単利・年率、365 日ベース）である。

・配当は無視する。また、値洗いに伴うキャッシュフローに関する金利も無視すること。

・オプションはヨーロピアン・タイプである。

・デリバティブの取引単位は、日経平均の 1,000 倍である。

2.2 問題の状況と説明

まずこの問題文の状況を整理する。資産家 A 氏は、株式ポートフォリオが日経平均と同じ構成で時価 5,000 百万円保有している。また株式運用から大きな収益は必要ないと考えているという状況である。この状況の中、デリバティブを用いて、株式ポートフォリオのリスクとリターンを調整する。

次に図表と問題文にある語句の説明を行う。

ポートフォリオは、投資家が保有する金融資産の一覧表、または安全性や収益性を考えた有利な投資の組み合わせである。

デリバティブは、株式や債券、通貨、原油、金といった原資産の価格を基準に理論価格が決まる金融商品の総称である。このデリバティブ取引にも様々あり、今回は**「先物取引」**と**「オプション取引」**を扱う。

先物取引とは、あらかじめ定められた将来の期日における取引条件（数量や金額など）を現時点で決めておく取引である。例えば、金の指輪を 1 年後に 10 万円で買う契約を行ったとする。その場合、1 年後に金が高騰・下落しても 10 万円で買うことが出来る。これが先物取引である。その先物取引の日経平均版といったものが、**日経平均先物**である。

日経平均先物は、将来の特定の日に、事前に合意された価格で日経平均株価を売買する契約を意味するものである。

次に**オプション取引**は、将来のあらかじめ定められた期日に、事前に定めた条件で売買をする権利のことをいい、この権利を売買する取引である。例えば、金の指輪が 10 万円で売っており、今すぐに購入もできるが、金の価値は変動する為、今後値下がりする可能性もある。そこで、「今から 1 年後に 11 万円で購入できるという権利」を購入する。もし、1 年

後に金の価格が値上がりして 12 万円になった時に権利を行使すれば、11 万円で金の指輪を購入可能であり、1 万円の差額分が利益となる。また権利は放棄も可能で、指輪の価格が 9 万円の場合、11 万円で購入できる権利を行使すると損するため、権利を放棄することとなる。しかし権利を放棄すると、「11 万円で購入できる権利」を購入する際にはオプション代金としていくらか支払いをしているので、この代金分は損をする。このようなオプションには 2 種類あり、**コールオプション**と**プットオプション**がある。

コールオプションは、あらかじめ決めた行使価格で商品を買う権利である。ある商品を購入する予定だが価格が上昇する可能性がある場合、コールオプションを買う。売買時の市場価格よりも行使価格の方が安い場合、権利を行使することで安く購入できる。

プットオプションは、あらかじめ決めた行使価格で商品を売る権利である。ある商品を売却する予定だが価格が下落する可能性がある場合、プットオプションを買う。売買時の市場価格よりも行使価格の方が高い場合、権利を行使することで高く売却できる。

ヨーロピアン・タイプとは、権利行使日（満期日）にのみ、権利行使ができるオプション取引である。現在、大阪取引所の指数オプション取引および有価証券オプション取引では、権利行使において、ヨーロピアン・オプションを採用[1]している。

語句の理解が進んだところで、図表 1 と注釈の意味と状況を整理する。

図表 1 は、現在の日経平均とデリバティブのデータである。現在の日経平均は 20,000 円、日経平均先物は 20,200 円である。コールオプションは行使価格 20,000 円の場合、価格は 1,050 円であり、21,000 円の場合、価格は 580 円である。またプットオプションは、行使価格 18,000 円の場合、価格は 350 円であり、20,000 円の場合、価格は 965 円である。図表 1 の右側にあるデルタは、後述にある問 4 において説明する。

また注釈より、半年後までの金利（リスクフリー・レート）は 2%である。配当は無視して行い、オプションは先ほど説明したヨーロピアン・タイプである。そして、デリバティブの取引単位は 1,000 倍である。これらを利用して問題の解法を行う。

[1] https://www.ifinance.ne.jp/glossary/derivatives/der150.html#gsc.tab=0
ヨーロピアン・オプションとは/デリバティブ用語集　アクセス日 2024/11/20

3.　問 1

3.1 問題文

A 氏は、まず、日経平均先物を用いて株式ポートフォリオの半年後の価格変動リスクをフルヘッジすることを検討した。

(1)　先物はどのように取引を行えばよいか、ポジションと取引単位（枚）数を示しなさい。

(2)　日経平均と日経平均先物は、(1) の取引から 1 週間後および半年後に次のようになったとする。このとき、株式ポートフォリオの時価と先物の損益を合わせた総資産額は、それぞれいくらですか。

	日経平均（円）	日経平均先物（円）
1 週間後	18,492	18,670
半年後（満期時）	21,500	21,500

(3)　預金（5,000 百万円）の 1 週間後および半年後の金額（元利合計額）を計算すると、それぞれ 5,002 百万円、5,050 百万円である。(2)の答えとこれらの元利合計額を比較して、差異が生じていれば、どのような理由で生じたのか説明しなさい。

3.2 問題の状況と説明

この問題は A 氏のポートフォリオを、日経平均先物を用いて半年後の価格変動リスクを再調整する状況である。その時における、取引枚数や総資産額を解法する問題である。

3.3 解法

まず（1）から行う。

図 1　日経平均現物と日経平均先物における半年間の取引関係

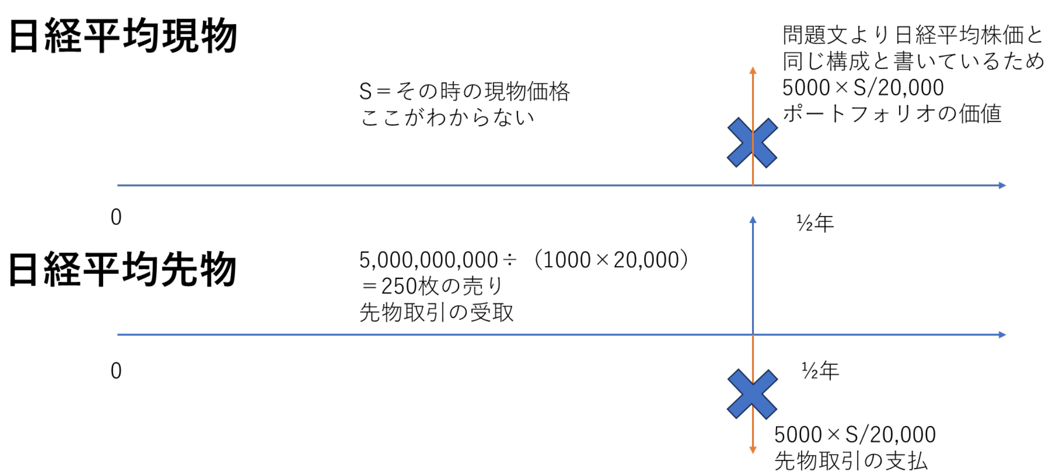


図 1 をもとに説明する。図 1 にある S はその時の現物価格を示している。問題文より株式ポートフォリオは日経平均と同じ構成で 5,000 百万円とある。したがってポートフォリオの価値もグラフの右上のように、5,000 百万円×S/20,000 となる。またデリバティブの満期はすべて半年後であり、以下で検討する収益も半年後を対象とあるため、現物も先物も同じ半年を対象としている。したがって、先物取引の支払いも、グラフの右下のように 5,000 百万円×S/20,000 となる。つまり二つの式は相殺できる。

ここで残るのは先物取引の受取であり、そこを計算すればよい。式は以下のようになる。

$$5{,}000{,}000{,}000 \div (1000 \times 20{,}000) = 250.$$

したがって、日経平均先物 250 枚の売りが答えである。

次に（2）を解法する。

総資産額は、株式ポートフォリオの時価と先物の損益を足したものとして考えられる。したがって、求めるのに必要な式は以下の式である。

$$B = \frac{S_t}{S} \times v_p + (F - F_t) \times A \times m, \quad (1)$$

$$\frac{S_t}{S} \times v_p, \quad (2)$$

$$(F - F_t) \times A \times m. \quad (3)$$

ここで式の説明を行う。B、S_t、S、v_p、F、F_t、A、mはそれぞれ総資産額、1 週間後・半年後の現物価格、現物価格、現在の総資産額、先物価格、1 週間後・半年後の先物価格、問 1（1）の取引単位数、取引単位を表している。(1)式は(2)式と(3)式を足したものであることがわかる。(2) 式は 1 週間後および半年後の現物価格を現物価格で割り、それを現在の総資産額で掛けることで、株式ポートフォリオの時価を求めることが出来る。即ち、(2)式は株式ポートフォリオの時価を求めている。(3)式は、先物価格から 1 週間後・半年後の先物価格を引き、それを取引単位、取引単位数で掛けることで、先物損益を求めることが出来る。即ち、(3)式は先物損益を求めている。したがって(1)式は、株式ポートフォリオの時価と先物損益を足した総資産額として求めることが出来るのである。

この式を利用して解法する。まず 1 週間後から計算する。1 週間後の現物価格S_tと先物価格F_tはそれぞれ表より 16,492 円、18,670 円である。また現物価格Sは問題文より 20,000 円、現在の総資産額v_pは 5,000,000,000 円、先物価格Fは多くの 20,200 円、取引単位数Aは問 1（1）より 250、取引単位mは注釈より 1,000 である。

半年後も同様に、$S_t = 21{,}500$, $S = 20{,}000$, v_p=5,000,000,000, F=20,200, F_t=21,500, A=250, m=1,000 となる。これらを(1)式に代入する。したがって 1 週間後は

$$B = \frac{18{,}492}{20{,}000} \times 5{,}000{,}000{,}000 + (20{,}200 - 18{,}670) \times 250 \times 1{,}000$$

$$B = 250{,}000 \times 18{,}492 + 1530 \times 250{,}000 = 250{,}000 \times 20{,}022 = 5{,}005{,}500{,}000$$

となり、問題文より百万円単位で答えることになっているため、5,006 百万円が答えとなる。また半年後は、

$$B = \frac{21{,}500}{20{,}000} \times 5{,}000{,}000{,}000 + (20{,}200 - 21{,}500) \times 250 \times 1{,}000$$

$$B = 250{,}000 \times 21{,}500 - 1{,}300 \times 250{,}000 = 250{,}000 \times 20{,}200 = 5{,}050{,}000{,}000$$

となり、5, 050 百万円が答えとなる。

最後に(3)を考える。半年後の金額は同じ 5, 050 百万円である。一方で、1 週間後の金額は（2）の答えは 5, 006 百万円であったが、(3)の問題文では 5, 002 百万円であり異なっている。この差は、デリバティブの満期をすべて半年後としており、(1)での 250 枚の先物売りは半年後の満期を前提としている。それを図式化したものが以下のグラフである。

図 2　日経平均現物と日経平均先物における 1 週間と半年間の取引関係

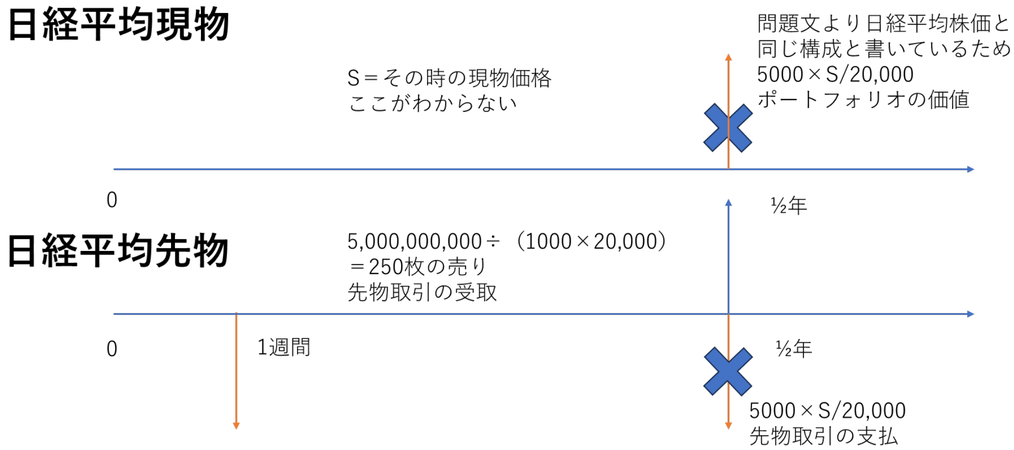


図 2 のように、半年ではなく 1 週間後になった。今回は半年後が満期であり、先物が満期になった場合は必ず、先物価格＝現物価格となる。しかし、満期までの間は理論値と実際の先物価格はズレが生じる。だからこそ今回、4 百万円の誤差が生じたのである。

4. 問2

4.1 問題文

次に、A氏は行使価格20,000円のコールとプットを用いた合成先物の売り取引によるフルヘッジを検討した。現時点の取引に伴う資金は、リスクフリー・レートによる借入れまたは運用を行うものとする。

(1)　この合成先物の売り取引により、半年後の総資産額（株式ポートフォリオの時価、デリバティブ契約からの損益、現金の合計額）はいくらになりますか？

(2)　先物によるヘッジの結果と合成先物によるヘッジの結果を比較して、先物およびコールオプションの価格を妥当すれば、プットオプションの価格は割安か割高か、根拠とともに示しなさい。

4.2 問題の状況と説明

この問題は先ほどの問 1 と異なり、コールオプションとプットオプションの合成先物の売り取引を行い、フルヘッジするという状況である。その総資産額を解法し、その後問1と比較するという問題である。

4.3 解法

まず(1)から行う。

問1での先物ポジションは売りであり、今回求める合成先物に関しても売りで求める。総資産額を式で表すと以下の通りとなる。

$$総資産額 = \frac{S_t}{S} \times v_p + \{max(K - S_t, 0) - P \times (1 + r \times T) - \max(S_t - K, 0) + C \times (1 + r \times T)\} \times A \times m, \quad (4)$$

$$株式ポートフォリオの時価（現物時価）= \frac{S_t}{S} \times v_p, \quad (5)$$

$$プット買いの損益 = max(K - S_t, 0) - P \times (1 + r \times T), \quad (6)$$

$$コール売りの損益 = -\max(S_t - K, 0) + C \times (1 + r \times T). \quad (7)$$

ここで式の説明を行う。S_t、S、K、v_p、P、r、T、C、A、mはそれぞれ半年後の現物価格、現物価格、権利の行使価格、ポートフォリオの時価、プットオプション価格、短期金利、オプション満期、コールオプション価格、問1（1）の取引単位数、取引単位を表している。総資産額（(4)式）は、プットオプションの買い（(6)式）とコールオプションの売り（(7)式）を足し、取引単位と取引単位数を掛けた後に、現物時価（(5)式）を足したものである。

(5)式は問1の(2)式と同様の式であるため、説明を割愛する。

プットオプションの買い（(6)式）は、権利の行使価格Kが、半年後の現物価格S_tよりも高い時に、プットオプションとしての利益を発揮する。逆に権利の行使価格Kが半年後の現物価格S_tよりも低い場合は、プットオプションとして利益はなく、0となる。したがって、max関数を使った$max(K - S_t, 0)$という式となる。そのあとの、$-P \times (1 + r \times T)$については、権利の行使をするために購入した価格を、半年間で金利運用するため、この式に表している。

またプットオプションを買うため、プレミアムを支払うことになる。したがって、この式はマイナスになるのである。つまり、プットオプションを買った時の式は(6)式になる。

コールオプションの売り（(7)式）についても、プットオプションの買いの逆のような考え方である。半年後の現物価格S_tが、権利の行使価格Kよりも高い時に、コールオプションとしての利益を発揮する。逆に半年後の現物価格S_tが、権利の行使価格Kよりも低い場合は、プットオプションとして利益はなく、0 となる。また売りであることから、この式はマイナスになる。したがって、max 関数$-\max(S_t - K, 0)$を使ったという式となる。そのあとの、$C \times (1 + r \times T)$については、(6)式と同様に金利運用を表している。

今説明した式をもとに解法する。図表 1 より$S = 20{,}000$ $P = 965$ $C = 1{,}050$ である。また、問 2 の問題文で行使価格 20, 000 円であることから$K = 20{,}000$である。そして、株式ポートフォリオは日経平均株価と同じ構成で時価は 5, 000 百万円とあることから$v_p = 5{,}000{,}000{,}000$、半年までのリスクフリー・レートは一定で、2. 00%であることから$r = 0.02$、オプション満期は半年であることから$T = \frac{182.5}{365} = \frac{1}{2}$である。また、問 1（1）と同様に$A = 250$ $m = 1000$である。これらを(4)式に代入する。

$$総資産額 = \frac{S_t}{20{,}000} \times 5{,}000{,}000{,}000 + \left\{max(20{,}000 - S_t, 0) - 965 \times \left(1 + 0.02 \times \frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. \max(S_t - 20{,}000{,}0) + 1{,}050 \times (1 + 0.02 \times \frac{1}{2})\right\} \times 250 \times 1{,}000$$

$$= \frac{S_t}{20{,}000} \times 5{,}000{,}000{,}000 + \left\{max(20{,}000 - S_t, 0) - \max(S_t - 20{,}000{,}0) + (-965 + \right.$$

$$\left. 1{,}050) \times \left(1 + 0.02 \times \frac{1}{2}\right)\right\} \times 250 \times 1{,}000$$

$$= 250{,}000 S_t + \{max(20{,}000 - S_t, 0) - \max(S_t - 20{,}000{,}0)\} \times 250 \times 1000 + 21{,}462{,}500.$$

ここで max 関数を整理する。S_tが 20, 000 円を下回る場合はプットが$20{,}000 - S_t$、コールは 0 である。一方で、S_tが 20, 000 円を上回る場合はコールが$-(S_t - 20{,}000) = 20{,}000 - S_t$、プットは 0 となる。したがって、解法の続きは以下のようになる。

$$総資産額 = 250{,}000 S_t + (20{,}000 - S_t) \times 250 \times 1{,}000 + 21{,}462{,}500 = 250{,}000 S_t -$$

$$250{,}000 S_t + 5{,}000{,}000{,}000 + 21{,}462{,}500$$

$$= 5{,}021{,}462{,}500.$$

よって半年後の総資産額は、5, 021 百万円となる。

次に(2)を解法する。

問 1（2）で求めた先物をフルヘッジした場合、総資産額は 5, 050 百万円となる。また問 2（1）で求めた合成先物によるフルヘッジでは、総資産額は 5, 021 百万円となり、コール売りとプット買いを合成した方が下回っている。この状況は即ち、もし先物とコールの価格が妥当であれば、プットオプションの価格は割高であると考えることが出来る。これを証明す

るために、**無裁定条件**を利用する。

無裁定条件は、金融商品の理論価格、とくに金融派生商品の理論価格算出の基本となる考え方で、金融商品の価格は裁定取引を許さないようなものでなくてはならないという考え方である。裁定取引は基本的に不合理な取引であり、裁定取引が現実に市場で可能になると実際に行われ、市場は裁定取引ができない状態へ速やかに収束していく[2]とされている。例えば、A 店において 10 万円で買った宝石を、B 店では 12 万円で売ることができる状況があるとする。この場合、A 店で宝石を買いまくって B 店で売るのを繰り返せば、誰でもお金持ちになれてしまう。この乖離（差）が常にないというのが無裁定条件である。この条件をオプションにおいて一つの関係式にしたのが**プット・コールパリティ**である。

プット・コールパリティは、同一の原資産・満期・行使価格において、プットオプションとコールオプションのプレミアムの関係を表す式である。一般にプット・コールパリティが破られた場合（プットオプションとコールオプションの価格が乖離した場合）、裁定取引の機会が生まれる。プット・コールパリティの式は以下のとおりである。

$$S + P = C + \frac{K}{(1 + r \times t)} \quad (8)$$

(8)式においてS、P、C、K、r、tはそれぞれ現物価格、プットオプション価格、コールオプション価格、権利の行使価格、短期金利（リスクフリーレート）、満期までの期間を表している。また(8)式は、プットオプションと現物価格を足したものが、権利の行使価格から金利運用を割ったものにコールオプションを足したものと同じになるという関係性を示している。この式において、左辺＞右辺となる場合、プットオプションは割高であると考えることが出来る。現物価格S、プットオプション価格P、コールオプション価格Cは表より、20,000 円、965 円、1,050 円となる。権利の行使価格K、満期までの期間tは問題文より、20,000 円、1/2 年となる。また短期金利rは注釈より 0.02 である。これらを(8)式に代入すると、

$$20{,}000 + 965 = 1{,}050 + \frac{20{,}000}{(1 + 0.02 \times \frac{1}{2})}$$

となり、左辺は$20{,}965$、右辺は$1{,}050 + 19{,}801.980\cdots \fallingdotseq 20{,}852$ となる。

したがって左辺＞右辺となり、プットオプションが割高であると証明できる。

[2] https://www.sigmabase.co.jp/useful/keyword/m/musaiteiriron.html

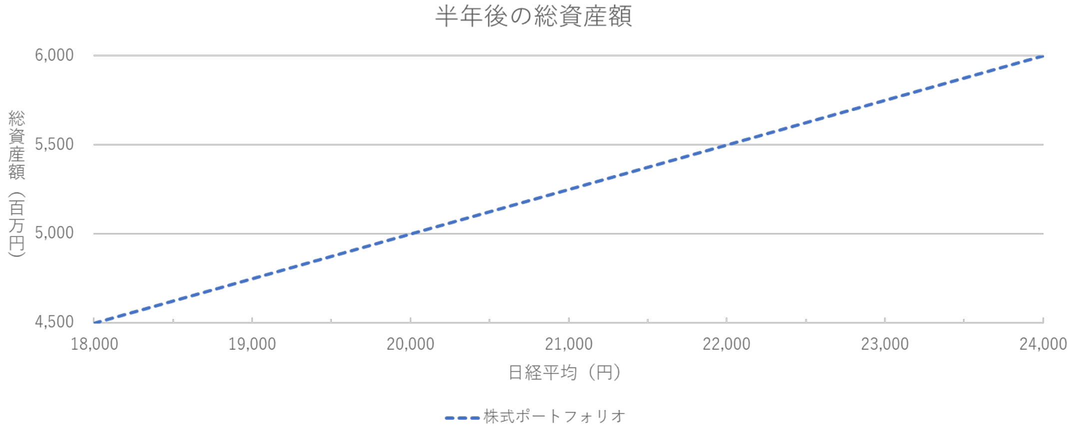
無裁定理論・金融キーワード解説/シグマインベストメントスクール　アクセス日 2024/11/24

5. 問 3

5.1 問題文

A 氏は、フルヘッジに代えて、ある水準以上の株価上昇時に総資産額が一定となるような上限を設けることにより株価上昇の利益の一部をあきらめる一方で、株価下落時の損益を改善する取引（コールオプションを用いたカバードコール取引）を検討することにした。この取引には、行使価格 21,000 円のコールを用い、現時点の取引に伴う資金はリスクフリー・レートによる借入れまたは運用を行う。このとき、半年後の日経平均の水準（横軸）に対する総資産額（縦軸）を示すグラフを描きなさい。なお、グラフに屈折点があれば、その座標（株価と総資産額の値）も示すこと。

グラフ 1　半年後の総資産額（問 3 問題文より）

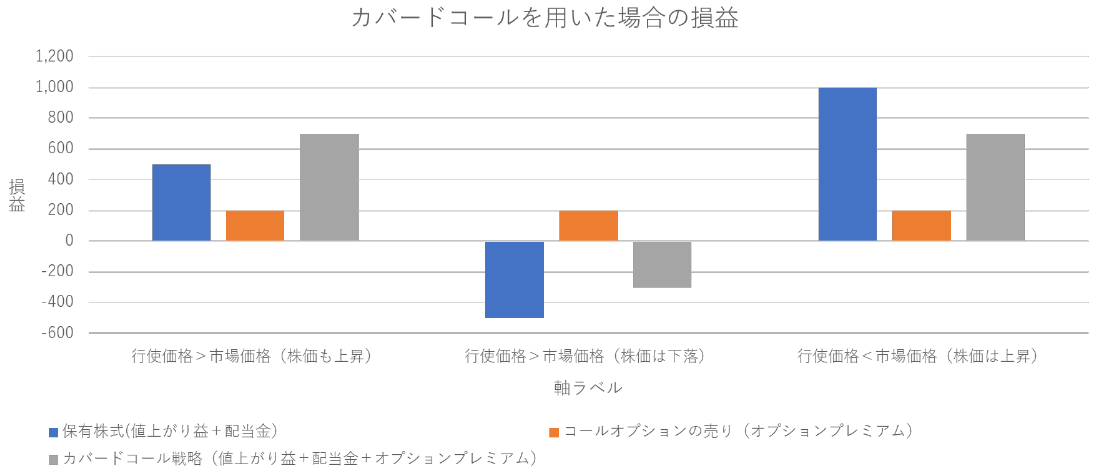


5.2 問題の状況と説明

この問題は**カバードコール戦略**という戦略方法で、ある基準以上の株価上昇において、株価上昇による利益はあきらめるが、株価が下落した時に損を抑えるという戦略を取った。

カバードコール戦略は、原資産を残しつつ、コールオプションを売る戦略である。この戦略は、保有する原資産について、権利行使価格以上の値上がり益は放棄することになるが、オプションのプレミアムを受け取ることが出来る。行使価格と市場価格の関係性によって状況が変化するため、その状況をグラフで整理する。

グラフ 2 カバードコールを用いた場合の損益



グラフ 2 は、カバードコール戦略を用いた場合の損益の関係性を表している。縦軸は損益であり、横軸は行使価格と市場価格の関係性を表している。オプションプレミアム 200 円で配当金も 200 円と仮定している。グラフの青色は、値上がり益と配当金を足した保有株式を表している。グラフ 2 のオレンジ色は、コールオプションの売り（オプションプレミアム）を表している。グラフ 2 の灰色はカバードコール戦略の損益を表している。

一番左は、行使価格の方が市場価格よりも高く、株価自体も上昇している場合である。値上がり益が 300 円の場合、保有株式は配当金含めて 500 円となる。即ち、カバードコール戦略としてはオプションプレミアム含めて 700 円の利益となる。

真ん中は、行使価格の方が市場価格よりも高く、株価自体が下落している場合である。値下がりの損が 700 円の場合、保有株式は配当金含めて-500 円となる。しかし、カバードコール戦略としては、オプションプレミアムを受け取ることが出来るため-300 円となる。

一番右は、市場価格の方が行使価格よりも高く、株価はもちろん上昇している場合である。この場合のみ保有株式の方がカバードコール戦略よりも高くなってしまうのである。理由としては、カバードコール戦略が行使価格を超える値上がり益を受け取ることが出来ないからである。この値上がり益はコールオプションを買っている人が受け取ることが出来る。このような損益関係がカバードコール戦略である。

5.3 解法

カバードコール戦略において重要なのは、行使価格の基準である。今回は問題文より 21,000 円である。また売ったコールプレミアムを満期まで金利運用するため、コールプレミアム×金利が総資産額に上乗せされる。即ち、行使価格の 21,000 円まではコールプレミアム×金利が上乗せされ、21,000 円以上は値上がり益を受け取ることが出来ないため、利益が一定となる。コールプレミアムは、その価格に取引単位と取引単位数、さらに満期までの金利を掛けることで次のように求めることが出来る。

コールプレミアム＝価格×取引枚数×取引単位×(1+金利×満期)

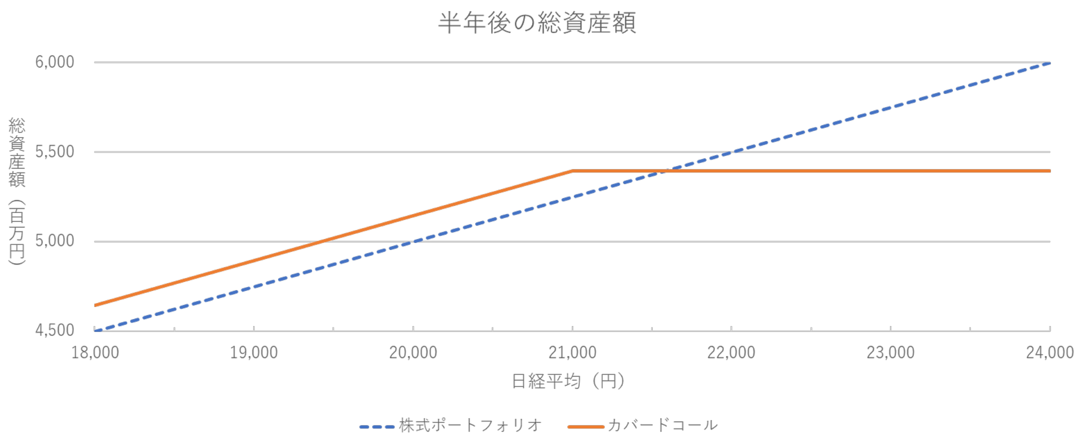
それぞれの値を式に代入すると、

$$コールプレミアム = 580 \times 250 \times 1{,}000 \times \left(1 + 0.02 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= 146{,}450{,}000 \fallingdotseq 146\ 百万円$$

したがって 21, 000 円までは株式ポートフォリオの金額より 146 百万円上乗せされる。また 21, 000 円以降は金額が一定となる。つまり屈折点は株価 21, 000 円である。その時の総資産額は、$21{,}000 \times 250 + 146$百万円=5, 396 百万円となる。またグラフは以下のとおりである。

グラフ 3　カバードコール戦略を用いた半年後の総資産額



6. 問 4

6.1 問題文

A 氏は問 3 のカバードコール取引を、オプションの売買に代えて、先物の機動的な売買により複製（ダイナミック・ヘッジ）することを考えた。

(1)　問 3 の取引と同じペイオフを達成するためには、現時点において何単位の先物でどのようなポジションをとるべきかを示しなさい。

(2)　(1) で求めた先物のポジションをとった直後に日経平均が上昇した場合、このオプションを複製する取引においては、先物のポジションをどのように調整する必要があるか、理由とともに説明しなさい。ただし、取引枚数を求める必要はない。

(3)　先物の機動的な取引によりオプション売買と同じ効果を目指しても、半年後の損益はオプション売買で対応した場合と乖離している場合が考えられる。そのような乖離が生じる理由を 1 つあげなさい。

6.2 問題の状況と説明

この問題は、ダイナミック・ヘッジ（詳細については補論を参照）を使った取引単位の調整を行う。その取引が問 3 で求めたカバードコール戦略と比較する問題である。この問題を

通して、ダイナミック・ヘッジ戦略を取った場合の特徴を掴む。ダイナミック・ヘッジの詳細な説明は補論にて行う。したがって、解法はダイナミック・ヘッジを説明した前提で行うこととする。またここで図表 1 のデルタを用いることになる。デルタについても補論において、詳細に説明する。

6.3 解法

まず(1)から行う。問 3 の取引はカバードコール戦略であり、問 4 の取引はダイナミック・ヘッジである。カバードコール戦略とダイナミック・ヘッジの時価をそれぞれ式で表すと以下のようになる。

$$\text{カバードコール} \quad V_1 = V_p - m \times N \times \mathrm{C}, \qquad (9)$$

$$\text{ダイナミック・ヘッジ} \quad V_2 = V_p + m \times N_F \times F. \qquad (10)$$

（9）式と（10）式において、V_1、V_2、V_p、m、N、C、N_F、Fはそれぞれカバードコール時価、ダイナミック・ヘッジ時価、ポートフォリオの時価、取引単位、コールした売却数量、コールオプション価格（行使価格 21,000 円の時）、先物売買数量、先物価格を表している。

（9）式についてカバードコール戦略は、コールオプションを売却するため、その売却数量Nとコールオプション価格C、取引単位mを掛けたものがマイナスの符号となる。したがって、それをポートフォリオの時価V_pから引く。これがカバードコール戦略の時価となる。

（10）式についてダイナミック・ヘッジは、先物をデルタによってポジションを調整しながら行う戦略であるため、先物売買数量N_Fと先物価格F、取引単位mを掛けたものをポートフォリオの時価V_pに足すことで求めることが出来る。

また原資産の価格変化に対する感応度を測るため、（9）式と（10）式を現物価格Sで微分する。（9）式を現物価格Sで微分すると、

$$\frac{dV_1}{dS} = \frac{dV_p}{dS} - m \times N \times \frac{dC}{dS} \qquad (11)$$

となり、（10）式を現物価格Sで微分すると、

$$\frac{dV_2}{dS} = \frac{dV_p}{dS} + m \times N_F \times \frac{dF}{dS} \qquad (12)$$

となる。

そして今回の問題において、問 3 と同じペイオフを達成することが必要である。即ちこれを達成するには、この感応度が等しくなれば良い。したがって、感応度が等しくなるように求めるため（11）式と（12）式をイコールで結ぶ。

$$\frac{dV_p}{dS} - m \times N \times \frac{dC}{dS} = \frac{dV_p}{dS} + m \times N_F \times \frac{dF}{dS}. \qquad (13)$$

この（13）式において、$\frac{dV_p}{dS}$は両辺にあるので相殺できる。また、mは両辺で掛けているため相殺できる。よって、以下の式に変形できる。

$$-N \times \frac{dC}{dS} = N_F \times \frac{dF}{dS}. \qquad (14)$$

（14）式のNは、問 1（1）より 250 枚である。また$\frac{dC}{dS}$と$\frac{dF}{dS}$はどちらもデルタ（詳細は補論（18）式）を意味すると考えることが出来る。したがって以下の式に変形できる。

$$-250 \times \Delta_C = N_F \times \Delta_F. \qquad (15)$$

ここで（15）式、Δ_Cについて考える。問 3 の取引はカバードコール戦略であり、行使価格は 21,000 円である。したがってその時のデルタは図表 1 より 0.41 となる。また、Δ_Fについても考える。基本的に先物のデルタであるため、オプション価格の原資産に対する感応度であるデルタは、1 近くになる。実際のデルタを求めるために、先物理論の価格を式で表す。先物理論価格Fを式で表すと以下である。

$$F = S \times \{1 + (r - d) \times T\}. \qquad (16)$$

（16）式において、S、r、d、Tはそれぞれ現物価格、短期金利（リスクフリーレート）、配当利回り、先物満期を表している。（16）式は、短期金利rと配当利回りdを引いたものに先物満期Tをかけて 1 を足したものに、現物価格Sを掛けることで、理論上の先物価格を求めることが出来る。

この（16）式を現物価格Sで微分することでデルタを求めることが出来る。また、短期金利rは注釈より 0.02、配当利回りdは注釈より無視すると記載があるため 0 とする。先物満期Tは問題文より半年であるため$\frac{1}{2}$である。これを基にデルタを求めると以下のようになる。

$$\Delta_F = \frac{dF}{dS} = 1 + (r - d) \times T = 1 + 0.02 \times \frac{1}{2} = 1.01.$$

よって$\Delta_F = 1.01$、$\Delta_C = 0.41$となり、これを（15）式に代入する。

$$-250 \times 0.41 = N_F \times 1.01. \qquad (17)$$

したがって必要な先物ポジションN_Fは

$$250 \times -0.41 = N_F \times 1.01,$$

$$N_F = -\frac{250 \times 0.41}{1.01} \fallingdotseq -101.$$

となる。よって日経平均先物 101 枚の売り建てをすればよい。

次に（2）を行う。この問題は、日経平均が上昇した場合、どのような先物ポジションの調整が必要になるかということである。補論の通り、コールオプションにおけるデルタの範囲は、買いの場合 0～1 である。売りの場合は-1～0 である。また原資産価格が上昇すると、コールオプションの価格も上がる。また原資産に対する感応度がデルタであるため、デルタも上昇する。現在の日経平均は図表 1 より 20,000 円である。コールオプションの行使価格は問 3 より引き続き 21,000 円である。その時のデルタは前述のとおり 0.41 である。即ち補論より、アウト・オブ・ザ・マネー（OTM）となっている。先ほど問 4（1）で求めた（17）式をもう一度確認する。

$$-250 \times 0.41 = N_F \times 1.01.$$

この部分の 0.41 が、今回日経平均の動きによって上昇するということである。この (17) 式を成り立たせなければ（1）と同じペイオフを達成することはできないため、この式をイコールにする必要がある。そのためには、先物の売り数量N_Fを増やす必要がある。しかし、具体的なデルタの値が示されない限り 先物数量N_Fを求めることはできない。

したがって答えとしては、株価が上昇するとコールオプションのデルタは大きくなり、(17) の式を一致させるためには、先物の売り枚数を増やす必要があるということである。

最後に（3）を行う。この問題は、なぜオプション売買で対応した場合と損益が乖離する可能性があるのか考える問題である。これはダイナミック・ヘッジの場合、問 4（2）のように、日経平均 (原資産価格) の変化によってオプション・デルタも変化する。したがって、ダイナミック・ヘッジは日経平均の変化に応じて、先物枚数を調整しなければならない戦略である。つまり、その分取引コストがかかってしまう可能性があることや、デルタの変化にポジション調整が追い付かないことも考えられる。それが乖離してしまう理由である。

7. 終わりに

今回の問題は、資産家 A 氏の日経平均と同じ構成で保有している時価 5,000 百万円の株式ポートフォリオについて、先物取引、オプション戦略、ダイナミック・ヘッジのそれぞれを用いて、リスクとリターンの調整を行った。

それぞれの戦略において、メリットやデメリットがあり、特にダイナミック・ヘッジや先物取引はベンチマーク（日経平均や日経平均先物）が変化すると、リスクやリターンも変化することが分かった。またオプションを使ったカバードコール戦略は、一定基準以上の値上がり益は受け取れないが、そこまではプレミアムが付き状況によっては適切な戦略になりうることが分かった。それぞれの特徴を基に、ポートフォリオの調整を実際の取引においても行っていきたい。

8. 補論　～ダイナミック・ヘッジ（デルタヘッジ）とは～

今回の補論においては、問 4 に出てきたダイナミック・ヘッジの戦略、およびその戦略に必要なデルタの説明を行う。

まずダイナミック・ヘッジ（デルタヘッジ）は、オプション取引で原資産の価格変動による損失を回避するヘッジ取引の手法のひとつである。また、株価指数オプションに投資する場合、デルタと呼ばれるリスク指標に応じた比率で当該株価指数先物（原資産）の売買を組み合わせるデルタヘッジ[3]がある。

次にデルタについて解説する。デルタはオプション価格の原資産に対する感応度である。例えば、デルタ=1 の場合は原資産と同じ値幅で動くことを意味する。またデルタ=1 ではない場合は以下のようになる。例えば、現物価格Sが 10,000 から 10,100 に上がったとする。即ち現物価格の変化量は$\Delta S = 100$となる。その時オプション価格Cが 1,000 から 1,030 になったとする。即ちオプション価格の変化量は$\Delta C = 30$となる。
この時デルタはオプション価格の原資産に対する感応度であるから、以下のように表すことが出来る。$\frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{30}{100} = 0.3$

即ちデルタはオプション価格を現物価格で微分したものとなる。このようにオプション価格の原資産に対する感応度であるから、現物価格で微分するのがデルタの式である。

$$\text{デルタ} = \frac{dC}{dS}. \qquad (18)$$

（18）式において、C、Sはそれぞれオプション価格、現物価格を表している。また先物価格の原資産に対する感応度も同様に表すことが出来る。

$$\text{デルタ} = \frac{dF}{dS} \qquad (19)$$

（19）式において、F、Sはそれぞれ先物価値、現物価格を表している。

次にイン・ザ・マネー（ITM）、アット・ザ・マネー（ATM）、アウト・オブ・ザ・マネー（OTM）について説明する。この言葉はそれぞれ、行使価格と市場価格の関係によって起こる状態のことを示している。

ITM は、オプション取引の買方にとって有利な状態を示しており、原資産価格（市場価格）と権利行使価格（行使価格）との関係において、オプションの買方が権利行使をした場合に「利益が発生する状態」である。関係性としては、コールオプションの場合、市場価格の方が行使価格よりも高く、プットオプションの場合、市場価格の方が行使価格よりも低い状態となる。

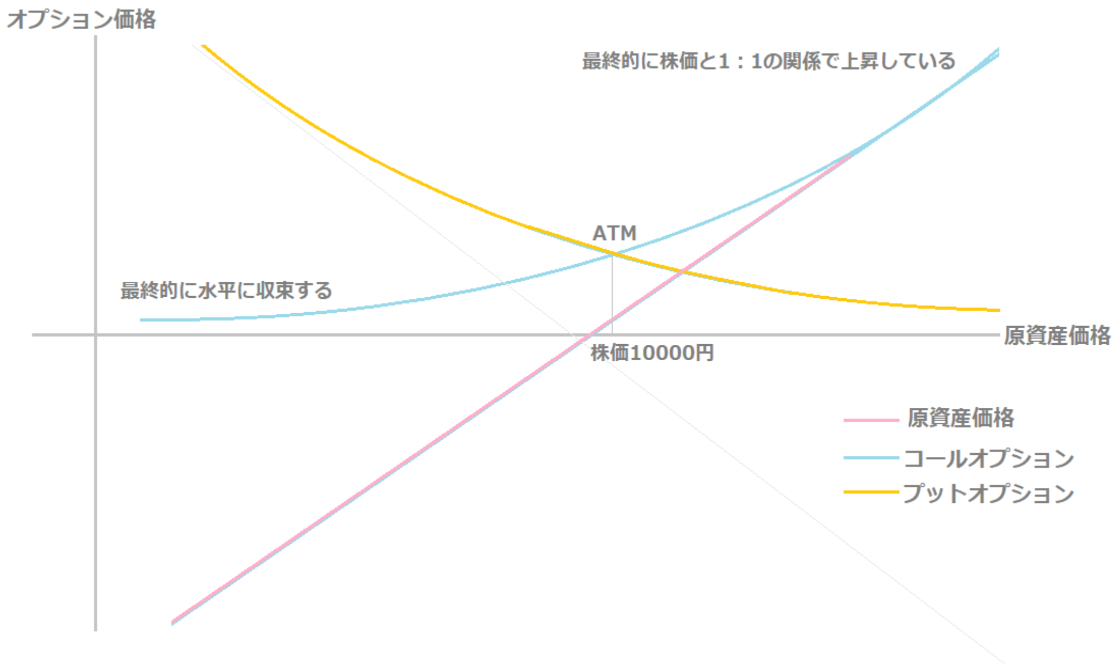
ATM は、オプション取引において原資産価格と権利行使価格が等しい状態を示しており、

[3] https://www.daiwa.jp/glossary/YST3144.html
ダイナミック・ヘッジ/金融・証券用語解説集/大和証券　アクセス日 2024/11/25

原資産価格（市場価格）と権利行使価格（行使価格）との関係において、オプションの買方が権利行使をした場合に「損益が発生しない状態」である。関係性としては、コールオプション、プットオプションとも、行使価格が市場価格と等しい場合となる。

OTM は、オプション取引の買方にとって不利な状態を示しており、原資産価格（市場価格）と権利行使価格（行使価格）との関係において、オプションの買方が権利行使をした場合に「損失が発生する状態」である。関係性としては、コールオプションの場合、市場価格の方が行使価格よりも低く、プットオプションの場合、市場価格の方が行使価格よりも高い状態となる。これらの状態を理解した上で、原資産価格とオプション価格、デルタについてグラフで整理する。

グラフ 4　原資産価格とオプション価格の関係



出典：https://manabu-blog.com/option-delta　より

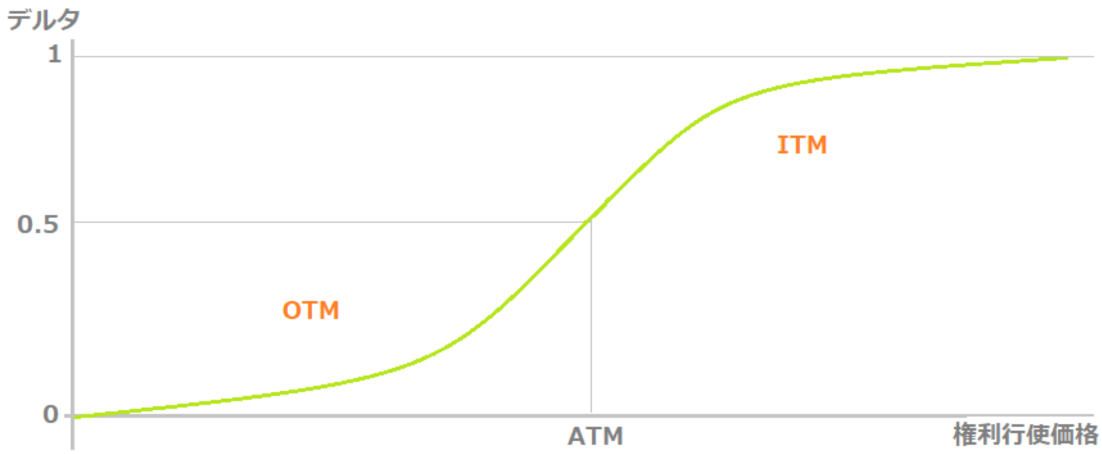
グラフ 4 は原資産価格とオプション価格の関係について示している。横軸が原資産価格で、縦軸が原資産価格に対応するオプション価格を示している。株価 10,000 円が ATM の状態であり、原資産価格とそれぞれのオプション価格が描かれている。

グラフの右側は、株価が上昇すると、コールオプション価格も上がり、コールオプションの価値と原資産価格の価値が同じになるため、最終的に株価と 1 対 1 の関係で上昇する。一方で、プットオプション価格は減少し、原資産価格が上昇することで、需要がほとんどない状態になる。したがって、最終的に水平になり、株価の動きに反応しなくなる。グラフの左側は、株価が減少すると、コールオプション価格も低下し、需要がほとんどなくなる状態になる。したがって、最終的に水平に収束する。一方で、プットオプション価格は上昇して、最終的に株価と上下対称の関係で減少する。グラフ中央である ATM の状態の時は、均衡がとれている状態であると考えることができ、コールオプションもプットオプションもそれぞ

れ、グラフの傾きが原資産価格の 1/2(-1/2)になる。またこのグラフの傾きこそが感応度、即ちデルタを示していることが理解できる。

それを踏まえて次に、デルタと権利行使価格の関係について整理する。

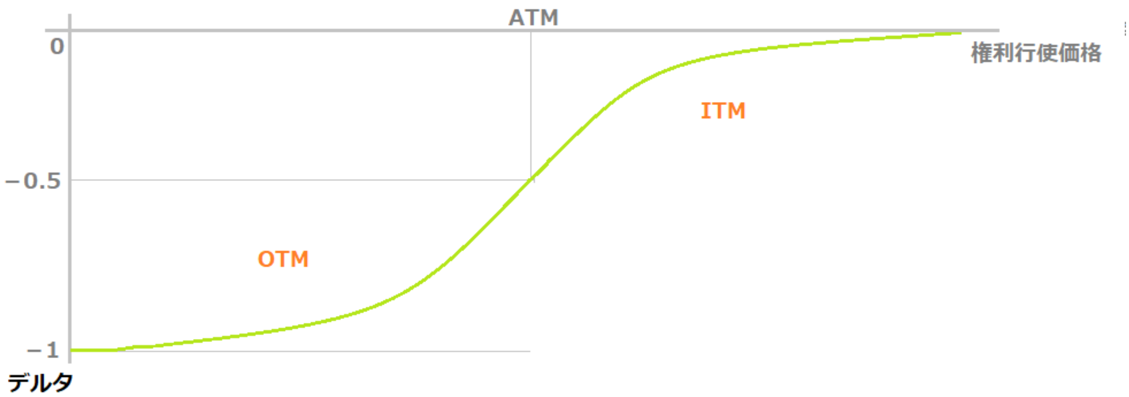
グラフ 5　コールオプションにおけるデルタと権利行使価格の関係



出典：https://manabu-blog.com/option-delta　より

グラフ 5 はコールオプションにおけるデルタと権利行使価格の関係を示している。横軸が権利行使価格、縦軸がデルタである。デルタは ATM の時に 0.5 に近づく。そして ITM の時に原資産価格と同じ動き方をすると先ほどのグラフで述べた通り、1 に近づく。逆に OTM の場合、最終的に株価に反応しなくなるため、0 に近づく。これらはすべて先ほどのグラフの傾きと等しくなっている。

グラフ 6　プットオプションにおけるデルタと権利行使価格の関係



出典：https://manabu-blog.com/option-delta　より

このグラフは、プットオプションにおけるデルタと権利行使価格の関係を示している。コールオプションの時と同じように、ATM の時は-0.5 となり、ITM になると 0 に近づく。また OTM になると-1 に近づくことがわかる。これらも先ほどのグラフの傾きとデルタが一致している。

即ちオプションとデルタの関係は、コールオプションの買いの場合、デルタは 0 から 1 の

範囲であり、コールオプションの売りの場合、デルタは-1 から 0 の範囲である。また、プットオプションの買いの場合、デルタは-1 から 0 の範囲であり、プットオプションの売りの場合、デルタは 0 から 1 の範囲である。

原資産価格が上昇すると、コールオプションの価格は上がり、プットオプションの価格は下がる。したがって、コールオプションの買いでのデルタの範囲は正となり、プットオプションの買いでのデルタの範囲は負となる。また売りは符号が逆になるということである。

このデルタの性質を利用し、取引枚数のポジションを調整するのがダイナミック・ヘッジ（デルタヘッジ）という戦略である。

参考文献

1. 伊藤 敬介,萩島 誠治,諏訪部 貴嗣、新・証券投資論Ⅱ実務編、日本経済新聞出版、2009 年

2. 佐野三郎、改訂版パーフェクト証券アナリスト第 1 次レベル、ビジネス教育出版社、2022 年

3. https://www.nam.co.jp/education/coveredcall/1246392_4943.html
カバードコール戦略の事例研究/投資の教室/投資信託のニッセイアセットマネジメント株式会社 アクセス日 2024/11/24

4. https://www.nomura.co.jp/terms/japan/te/A02196.html
デルタ/証券用語解説集/野村証券 アクセス日 2024/11/25

5. https://kumamon2011.com/delta-hedging-explain-briefly/#google_vignette
日経 225 オプション/デルタヘッジとは？ アクセス日 2024/11/25

6. https://toushi-kyokasho.com/delta-hedging/
デルタヘッジとは/投資の教科書 アクセス日 2024/11/28