

基礎例題 2 分数関数のグラフ(2) □ □ □ □

関数 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。



分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

基本形 $y = \frac{k}{x-p} + q$ に直して点 (p, q) を原点とみる

- ① $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形(本書では基本形と呼ぶ)に変形する。
- ② 漸近線 $x=p, y=q$ をかく。
- ③ 漸近線の交点 (p, q) を原点とみて、 $y = \frac{k}{x}$ のグラフをかく。

定義域は $x \neq p$, 値域は $y \neq q$

解 答

$$\frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-2 \cdot 2+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = \frac{1}{x+2} - 2$$

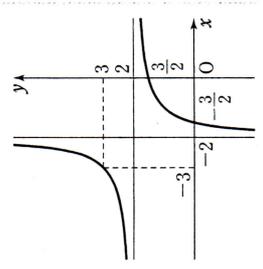
よって、 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ のグラフは、

$y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -2 ,

y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。(図)

漸近線は、 2 直線 $x = -2, y = 2$

また、値域は $y \neq 2$ (答)



$\leftarrow 2x+3$ を $x+2$ で割ると、商 2 , 余り -1

割り算の等式から

$$2x+3 = (x+2) \cdot 2 - 1$$

と変形してもよい。

\leftarrow 点 $(-2, 2)$ を原点とみ

て、 $y = -\frac{1}{x}$ のグラフ

をかく。

Lecture $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ から $y = \frac{k}{x-p} + q$ への変形

$c \neq 0, ad \neq bc$ のとき、次のようにして基本形に変形できる。

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{d}{c}) - \frac{ad}{c} + b}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$$

$c \neq 0, ad = bc$ のとき、 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ は $y = \frac{a}{c}$ (定数関数) の形に変形できる。

EX 3 次の関数のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。

- (1) $y = \frac{2x-7}{x-3}$
- (2) $y = \frac{-2x-5}{x+3}$
- (3) $y = \frac{6x+7}{2x+1}$

基礎例題 3 分数関数の値域 □ □ □ □

次の関数のグラフをかき、その値域を求めよ。

(1) $y = \frac{3x-3}{x+1} \quad (1 \leq x \leq 5)$

(2) $y = \frac{-2x+7}{x-3} \quad (2 \leq x \leq 4)$



関数の値域

グラフをかいて、 y の値の範囲をよみるとる

- ① 基本形に直して、実数全体でグラフをかく。
- ② 定義域の端の点をとる。
- ③ 定義域に対応した部分のグラフをかき、 y の値の範囲をよみるとる。

解 答

(1) $y = \frac{3x-3}{x+1}$ を変形して

$$y = \frac{6}{x+1} + 3$$

また $x=1$ のとき $y=0$

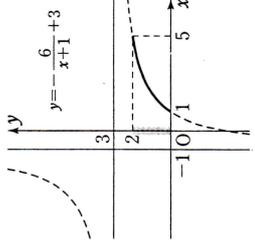
$x=5$ のとき $y=2$

よって、この関数のグラフは、(図)

の実線部分のようになる。

したがって、値域は

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{答}$$



(1) $3x-3 = 3(x+1)-3-3$
であるから
 $\frac{3x-3}{x+1} = 3 - \frac{6}{x+1}$
漸近線は、 2 直線
 $x = -1, y = 3$

(2) $y = \frac{-2x+7}{x-3}$ を変形して

$$y = \frac{1}{x-3} - 2$$

また $x=2$ のとき $y=-3$

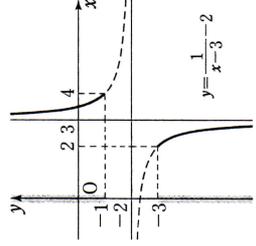
$x=4$ のとき $y=-1$

よって、この関数のグラフは、(図)

の実線部分のようになる。

したがって、値域は

$$y \leq -3, -1 \leq y \quad \text{答}$$



(2) $-2x+7 = -2(x-3)-6+7$
であるから
 $\frac{-2x+7}{x-3} = -2 + \frac{1}{x-3}$
漸近線は、 2 直線
 $x=3, y=-2$
分母 $\neq 0$ であるから、
分母が 0 となる $x=3$
は定義域から除かれる。

EX 4 次の関数のグラフをかき、その値域を求めよ。

- (1) $y = \frac{x}{x-2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$
- (2) $y = \frac{3x-2}{x+1} \quad (-2 \leq x \leq 1)$